નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૨ જો.

કિંમત રૂ. ૧-૨-૦

Department of Public Instruction, Bombay.

NEW GEOMETRY

PART II.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,
First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchandra Janardan Gokhale, B.A.,
Teacher, Training College for Men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S. T. C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B.A., S.T.C.,
Teachers, P. R. Training College, Ahmedabad.

1ST EDITION. 1000 COPIES.

PUBLISHED BY

Chimanlal Chunilal & Co.,
Proprietors,
Chimanlal Maneklal
AND
Chunilal Khushaldas,
AHMEDABAD.

1916.

PRICE 1-2-6.

Printed at

THE DIAMOND JUBILEE PRINTING PRESS

Salapose Road, AHMEDABAD,

by Devidas Chhaganlal Parikh.

મુંબઈ ઇલ્લાકાનું સરકારી કેળવણીખાતું.

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૨ જો.

મૂળ લેખક,
બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલ્હટકર, એલ્. એજી.,
ફર્સ્ટ આ. ડે. એ. ઇન્સ્પેક્ટર, નાસિક,
અને
રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,
શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફોર મેન, પુના.
અનુવાદક,
ગણેશ બચાજી સપ્રે, બી. એ., એસ્. ટી. સી.,
અને
મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી. એ.,
એસ્. ટી. સી.,
શિક્ષક, પ્રેમચંદ રાયચંદ ટ્રેનિંગ કોલેજ, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ ૧લી. પ્રત—૧૦૦૦. સને ૧૯૧૬.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,
ચીમનલાલ, ચુનીલાલની કંપનિ.
માલીક—ચીમનલાલ માણેકલાલ
અને
ચુનીલાલ ખુશાલદાસ
આસ્તોડીઆ રોડ—અમદાવાદ.

કિં. રૂ. ૧—૨—૬.

અમદાવાદ—સલાપોસ રોડ,
ધિ "ડાયમંડ જ્યુબિલિ" પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં
પરીખ દેવીદાસ છગનલાલે છાપ્યું

પ્રસ્તાવના.

ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં **'નવી ભૂમિતિ'*** શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી ગ્રંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક ગ્રંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ ગોડફ્રે અને સિડન્સ, બર્નાર્ડ અને ચાઇલ્ડ, પિયરપોઇંટ, એગર વગેરે ગ્રંથકારોના અંગ્રેજી ગ્રંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ઘણી ઉપયોગી થઈ પડી છે. એ માટે આ સર્વે ગ્રંથકારોના પ્રસ્તુત ગ્રંથકાર ઘણા આભારી છે. ગ્રંથકર્તા.

સૂચના—નવી ભૂમિતિ ભા. ૧લામાં 'શિક્ષકોને સૂચના', 'ઉપોદ્‌ઘાત', અને 'પરિશિષ્ટ **ब**'માં આપેલી માહીતી આ બીજા ભાગનો ઉપયોગ કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવી.

---

* **નવી ભૂમિતિ**—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અમુક ગણિતશાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ઘણા વખત પહેલાં દાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પર દાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ દાખલ કરી છે.

અનુક્રમણિકા.



	પૃષ્ઠ.
ખંડ ૧. (ક્ષેત્રફળ)	૧—૨૬
પ્રકરણ ૧. (પ્રાયોગિક ભાગ)... ...	૧—૧૦
પ્રકરણ ૨. (પ્રમેય ૨૬–૩૦)... ...	૧૦—૨૩
પ્રકરણ ૩. (કૃત્યો ૧૪–૧૫)... ...	૨૪—૨૬
ખંડ ૨. (વર્તુળ)	૨૬—૯૨
પ્રકરણ ૧. (પ્રાયોગિક ભાગ)... ...	૨૬—૪૮
પ્રકરણ ૨. (પ્રમેય ૩૧–૪૩)... ...	૪૮—૮૪
પ્રકરણ ૩. (કૃત્યો ૧૬–૧૯)... ...	૮૫—૯૨
ખંડ ૩.	૯૩–૧૬૫
પ્રકરણ ૧. (પ્રમેય अ–ड અને ૪૪–૫૩)...	૯૩–૧૩૫
પ્રકરણ ૨. (પ્રમેય ૫૪–૫૫)... ...	૧૩૬–૧૪૩
પ્રકરણ ૩. (કૃત્ય ૨૦–૩૨)... ...	૧૪૪–૧૬૫
પરિશિષ્ટ अ.	૧૬૫–૧૬૯
પરિશિષ્ટ ब. (પરચુરણ પ્રશ્નો) ...	૧૭૦–૧૯૨



શુદ્ધિપત્ર.

પૃષ્ઠ.	લીટી.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
૬ (આકૃતિમાં ड પાસેના ત્રિકોણમાં ल અક્ષર મૂકવો.)			
૯	૧૩	ધણો	ગણો
,,	૨૪	પણ લંબ	લંબ પણ
૫૪	૧	मकની	मंकની
,,	૬	मडની	मंडની
,,	૭	मड	मंड
૬૦	૧૦	જ્યાઓના	જ્યાઓનાં
૬૫	૪	બાજુઓના	બાજુઓનાં
૬૮	૬	છેડાના	છેડાનાં
૭૦	૧૫	૪૯	૫૦
૮૬	૧૬	ના	રચના-
૯૦	૧૪	બંદુઓમાં	બિંદુઓમાં
૯૮	૨૬	अक²	अक².
૧૦૫	૫	અર્વ	અર્ધ
,,	૧૧	ચોરસોમાંના	ચોરસોમાંનાં
,,	૧૨	પરનાં	પરના
૧૧૯	૧૯	બાજુઓના	બાજુઓનાં
૧૨૭	૧૦	अबकट	अबकड
,,	૨૩	લીટીનાં	લીટીના
૧૩૯	૨૩	पगई	∠पगई
૧૪૧	૫	જ્યાઓના	જ્યાઓનાં
,,	૧૪	ત્રિકોણના	ત્રિકોણનાં
૧૫૩	૮	मडई	∠मडई
૧૫૯	૯	डंमई	∠डंमई
,,	૧૧	कंमडं	∠कंमडं
૧૬૫ (આકૃતિની અંદર પડતો ग નહિ જોઈએ.)			
૧૯૧	૧૧	કાટખુણાનો	કાટખુણ ચોખુણનો

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૨.

ખંડ ૧.



પ્રકરણ ૧.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

ક્ષેત્રફળ.

અમુક જગાનું ક્ષેત્રફળ એટલે તે જગાની સપાટીનું પરિમાણ. એક પૈસાથી જેટલી જગા ઢંકાય તેના કરતાં બમણી જગા બે પૈસાથી ઢંકાય; માટે બે પૈસાની એક બાજુનું ક્ષેત્રફળ એક પૈસાની તેવીજ બાજુના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું, અને ત્રણ પૈસાની એક બાજુનું એક પૈસાની એક બાજુ કરતાં ત્રમણું......૪૦

૧" લંબાઈની બે લીટીઓ લો, અને તેના પર ચોરસો કાઢો. તેમને એક બીજા પર મૂકો, અને તેઓ એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે કે નહિ તે જુઓ.

૨", ૨·૪"......લંબાઈની બબ્બે લીટીઓ લઈ તેના પર ચોરસો કાઢો, અને ઉપલો પ્રયોગ કરો.

આ પ્રયોગો પરથી તમારા સમજવામાં શું આવે છે?

"જો સરખી લંબાઈની બે લીટીઓ પર ચોરસો દોરવામાં આવે, તો તે એક બીજા પર બરાબર બેસતા આવે છે; એટલે એમ માલમ પડે છે કે **સરખા પાયા પર દોરેલા બે ચોરસો સરખી જગા રોકે છે.**" હવે સરખા પાયા પરના

સઘળા ચોરસો સરખા હોય છે, અને ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની બાજુની લંબાઈના પ્રમાણમાં નિયમિત રીતે ઓછુંવત્તું થાય છે, તેથી ક્ષેત્રફળ માપવામાં આ આકૃતિ બીજી આકૃતિઓ કરતાં વધારે અનુકૂળ પડે છે. આ કારણથી ક્ષેત્રફળ માપવામાં આ એકમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

જ્યારે કોઈ ચોરસની બાજુ ૧" હોય છે, ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ એક **ચોરસ ઇંચ** છે એમ કહેવાય છે. જ્યારે બાજુ એક ફુટ હોય છે, ત્યારે ક્ષેત્રફળ એક **ચોરસ ફુટ** કહેવાય છે. જ્યારે બાજુ એક વાર હોય છે, ત્યારે ક્ષેત્રફળ એક **ચોરસ વાર** કહેવાય છે......ઇ૦

૨" લંબાઈની **अब** લીટી પર એક **अबकड** ચોરસ દોરો. **अब, अड** પર એક એક ઇંચને અંતરે નિશાની કરો. આ નિશાનીઓમાંથી ચોરસની બાજુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરો. ચોરસના કેટલા ભાગ થયા? દરેક ભાગમાં કેટલા ચોરસ ઇંચ છે?

૩", ૪", ૫"......ઇ૦ લંબાઈની લીટીઓ લઈ ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

જ્યારે ચોરસની બાજુ ૧" હોય છે, ત્યારે ચોરસ એક ચોરસ ઇંચનો હોય છે; જ્યારે ૨" હોય છે, ત્યારે ચોરસ ૪ ચોરસ ઇંચનો હોય છે......ઇ૦. આ પરથી ચોરસનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા માટે આપણે કયો નિયમ ઉપજાવી શકીએ?

"ચોરસની એક બાજુનો વર્ગ કરવો."

લંબચોરસ અથવા કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ.

ચાર ઇંચ લંબાઈની એક **अब** લીટી લો. તેના **अ** છેડામાંથી એક લંબ દોરો, અને તેમાંથી ૩ ઇંચ જેટલો એક **अड** ભાગ કાપી કાઢો. પછી એ બે લીટીને સમાંતર લીટીઓ દોરો, અને લંબચોરસ પુરો કરો. **अब** અને **अड** પર ઇંચ ઇંચને અંતરે નિશાની કરો, અને તે નિશાનીઓમાંથી લંબ-

ચોરસની બાજુઓ સુધી સમાન્તર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓથી લંબચોરસના કેટલા ભાગ થાય છે? "૧૨." દરેક ભાગમાં કેટકેટલા ચોરસ ઇંચ છે? "એક ચોરસ ઇંચ."

જ્યારે લંબચોરસની ઉંચાઈ ૩ ઇંચ હોય, ત્યારે ભાગ પડવાથી થએલી દરેક ઉભી હારમાં કેટલા ચોરસ ઇંચ હોય? "ત્રણ." જ્યારે ઉંચાઈ ૪ ઇંચ હોય, ત્યારે દરેક ઉભી હારમાં કેટલા ચોરચ ઇંચ હોય? "ચાર."

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૪ ઇંચ હોય, ત્યારે ચોરસોની ઉભી હારો કેટલી થાય? "ચાર." જ્યારે લંબાઈ ૫ ઇંચ હોય, ત્યારે કેટલી થાય? "પાંચ."

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ (ઉંચાઈ) અનુક્રમે ૪" અને ૩" હોય, ત્યારે દરેકમાં ત્રણ ચોરસ હોય એવી ૪ હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૨ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૫" અને પહોળાઈ ૩" હોય છે, ત્યારે દરેકમાં ત્રણ ત્રણ ચોરસો હોય એવી પાંચ હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૫ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૬" અને પહોળાઈ ૩" હોય, ત્યારે દરેકમાં ત્રણ ત્રણ ચોરસો હોય એવી ૬ હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૮ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૪" અને પહોળાઈ પણ ૪" હોય, ત્યારે દરેકમાં ચાર ચાર ચોરસો હોય એવી ચાર હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૬ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

.................................૪૦

આ ઉપરથી લંબાઈ અને પહોળાઈ (અથવા ઉંચાઈ)ની મદદથી લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા માટે કયો નિયમ આપણે ઉપજાવી શકીએ છીએ? **"લંબાઈનો ઉંચાઈ સાથે ગુણાકાર કરવો."** આ નિયમ ચોરસને લાગુ પડે ખરો? હા.

આ પરથી કોઈ પણ કાટખુણુ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા

માટે કયો નિયમ નીકળે છે? **"લંબાઈ અને ઉંચાઈનો ગુણાકાર કરવો."**

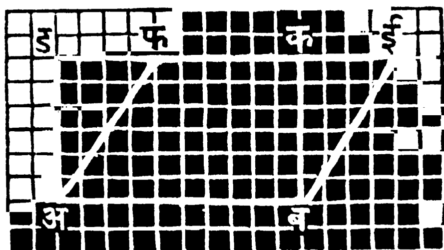
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ.

જેની ઉંચાઈ* ૭ ઘર સુધીની હોય અને જેની લંબાઈ ગમે તેટલાં પૂર્ણ ઘર સુધીની હોય એવો એક સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ એક ચોરસ દોરેલા કાગળ પર કાઢો. આ આકૃતિના પાયા પર તેટલીજ ઉંચાઈનો એક લંબચોરસ દોરો.

પહેલો પ્રકાર:—

(પહેલી રીત).

ધારો કે ચોખુણની ડાબી તરફની ઉભી (તિર્યક્) બાજુ લંબચોરસની અંદર પડે છે.



ઉપરની આકૃતિમાં જુઓ છો તે પ્રમાણે સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસનો કેટલોક ભાગ સાધારણ છે. લંબચોરસનો જે ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણમાં આવી જતો નથી તે ભાગને (એટલે △ **अडफ**ને) લંબચોરસની બહાર નીકળેલા સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના ભાગ (એટલે △ **बकई**) સાથે સરખાવો. બંને બરાબર છે? આ દરેક ભાગમાં કેટકેટલાં ચોરસ ઘરો આવેલાં છે તે જુઓ. દરેકમાં કેટલાં ઘર પુરેપુરાં છે ને કેટલાં અપૂર્ણ છે? બંને ભાગમાંનાં ઘરો

---

* **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની ઉપલી બાજુમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તે ચોખુણની ઉંચાઈ કહે છે.**

સરખાવી જોવાથી તમને શું માલમ પડી આવે છે? "બંને ભાગમાં ઘરોની સંખ્યા સરખી છે." આ ઉપરથી બંને ત્રિકોણોના સંબંધમાં તમે શું શીખો છો? "તે સરખા છે."

अडफ △=**बकई** △. દરેકમાં **अबकफ** ઉમેરો.

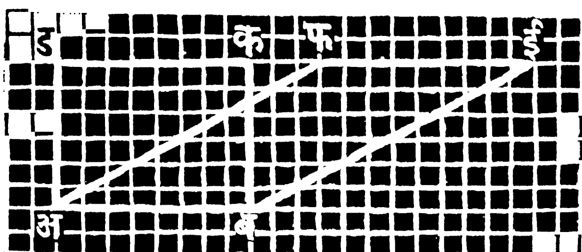
∴ **अबकड=अबईफ.**

આ ઉપરથી એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઇના લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળના સંબંધમાં શું અનુમાન કરો છો? **"એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઇના લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં હોય છે."**

(બીજી રીત).

अबकफ ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસ બંનેમાં સાધારણ છે. હવે લંબચોરસની બહાર નીકળેલા સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના ભાગ (**बकई**)ને કાપી કાઢો, અને તેને **अडफ** ત્રિકોણ પર ગોઠવો. તમને શું માલમ પડે છે? આ પરથી એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઇના સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળના સંબંધમાં કયા સામાન્ય નિયમ પર આવો છો?

બીજો પ્રકાર:—ધારો કે સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની ડાબી બાજુ લંબચોરસની જમણી બાજુની બહાર લંબાય છે.



(પહેલી રીત).

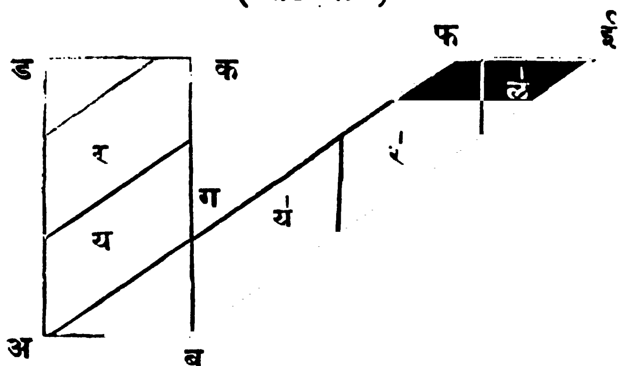
(ધારો કે **अबकड** લંબચોરસ છે, અને **अबईफ** સમ-પ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ છે).

अडफ ત્રિકોણનાં ચોરસ ઘરો ગણો. **बकई** ત્રિકોણનાં પણ ગણો. એ પરથી આ બે ત્રિકોણોના સંબંધમાં શું જાણવામાં આવે છે? "△ **अडफ**=△ **बकई**".

હવે, **अबईड** આકૃતિમાંથી એક વખત **बकई** △ અને એક વખત **अडफ** △ કાઢી લો. બાકી કયા ભાગ રહે છે? "**अबकड** અને **अबईफ**." આ પરથી **अबकड** અને **अबईफ**નાં ક્ષેત્રફળ કયા પ્રમાણમાં છે તે બાબત તમારા સમજવામાં શું આવે છે?

अबकड અને **अबईफ**માંનાં ઘરો ગણો અને તેની સરખામણી કરો. શું જાણવામાં આવે છે?

(બીજી રીત).



ધારો કે **अफ** બાજુ **बक**ને **ग** બિંદુમાં છેદે છે. **बग** જેવડા અંતરે **गक** અને **अड** પર એક પછી એક નિશાની કરો. આ નિશાનીઓનાં બિંદુઓને એવી રીતે સાંધો કે જોડનારી લીટીઓ **अग**ને સમાન્તર થાય. ધારો કે લંબ-ચોરસના ચાર ભાગ પડે છે. આમાંનો **य** ભાગ સમપ્રતિ-

ભુજ ચતુષ્કોણના યં ભાગ પર બરાબર બેસતો આવી રહેશે; કારણ કે બંને ભાગોના આકાર, લંબાઈ, તથા પહોળાઈ સરખાં છે. ય ભાગ કાપી યં ભાગ પર મૂકી જોવાથી એ બાબતની ખાત્રી થશે. એજ પ્રમાણે ર ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના રં ભાગ પર બરાબર બેસતો આવી રહે છે. લ ભાગ...... લં ભાગ પર......૪૦. આ પ્રમાણે આપણા જોવામાં આવે છે કે લંબચોરસના બધા ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના બધા ભાગ પર બરાબર બેસતા આવી રહે છે. (૫૦).

સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના બધા ધર્મ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં પણ છે, માટે ઉપલા પ્રયોગો પરથી કયો સામાન્ય નિયમ આપણે જાણી શકીએ છીએ?

"એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના લંબચોરસ અને સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં હોય છે."

ઉપર કહેલી રીત પ્રમાણે સરખી લંબાઈના (સરખા પાયા પરના) અને સરખી ઉંચાઈના લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તે પરથી સરખી લંબાઈ અને સરખી ઉંચાઈવાળા લંબચોરસના અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ વચ્ચે કેવો સંબંધ તમારા જોવામાં આવે છે?

એ પરથી સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની લંબાઈ અને ઉંચાઈનો તેના ક્ષેત્રફળ સાથે કેવો સંબંધ છે તે વિષે તમારા સમજવામાં શું આવે છે?

"(સમપ્રતિભુજ એટલે) સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેની લંબાઈ અને ઉંચાઈના ગુણાકાર બરોબર છે."

એ પરથી સરખી લંબાઈના (એટલે સરખા પાયા પરના)

અને એકજ (અથવા સરખી) ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ વિષે શું અનુમાન પર આવો છો?

"સરખા પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ બરાબર હોય છે."

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ.

ચોરસ દોરેલા કાગળ પર એકજ પાયા પર આવેલા અને એકજ ઉંચાઈના એક ત્રિકોણ અને એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લો. તેમાં આવેલાં ચોરસ ઘરો ગણો, અને તેમનાં ક્ષેત્રફળ કયા પ્રમાણમાં છે તે જુઓ.

"જો કોઈ ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ ત્રિકોણના ક્ષેત્ર-ફળ કરતાં બમણું હોય છે."

ત્રિકોણના પાયાના એક છેડામાંથી પાયાના બીજા છેડા તરફની બાજુને સમાંતર એક લીટી દોરો, અને એક બીજી લીટી શિરોબિંદુમાંથી પાયાને સમાંતર દોરો, કે જેથી એક સંપૂર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બને. હવે ઉપર પૂછેલા પ્રશ્નનો જવાબ આપવા પ્રયત્ન કરો.

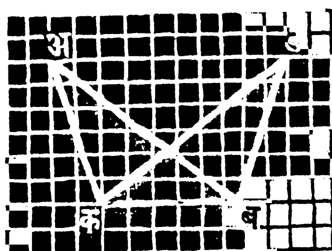
એક કાગળના કકડામાંથી એક ત્રિકોણ કાપી કાઢો. શિરો-બિંદુ પરથી પાયા પર લંબ પડે એવો (કાગળ વાળીને) વળ પાડો. ત્રિકોણના ખુણાઓને એવી રીતે વાળો કે ત્રણે શિરો-બિંદુઓ લંબને નીચલે છેડે (એટલે જ્યાં લંબ પાયાને છેદે છે ત્યાં) એકઠા થાય. આ પ્રમાણે વાળવાથી ત્રિકોણ કેવો આકાર ધારણ કરે છે? "કાટખુણ ચોખુણનો." ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ આ કાટખુણ ચોખુણના ક્ષેત્રફળ કરતાં કેટલાગણું છે? "બમણું." આ કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ કેટલું છે? તેની લંબાઈ ત્રિકોણના પાયાના પ્રમાણમાં કેટલી છે? "પાયાના

અડધ જેટલી." તેની ઉંચાઈ ત્રિકોણની ઉંચાઈના પ્રમાણમાં કેટલી છે? "અડધી."

ધારો કે ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ બ છે અને ઉંચાઈ પ છે. ત્યારે કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ કેટલું? $\frac{બ}{૨}\times\frac{પ}{૨}=\frac{બ\times પ}{૪}$. હવે આપણે જોયું છે કે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કાટખુણ ચોખુણના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું છે, માટે તે $\frac{બ\times પ}{૨}$ હોવું જોઈએ. આ ઉપરથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા માટે કયો નિયમ તમે શોધી કાઢો છો?

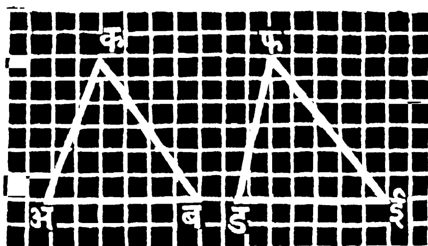
"ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પાયા તથા ઉંચાઈના ગુણાકારના અડધ બરાબર હોય છે."

એક ચોરસ દોરેલા કાગળ પર એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના **अबक** અને **डबक** એ ત્રિકોણો દોરો. બંનેમાંનાં ઘરો ધણો, અને તેમનાં ક્ષેત્રફળની સરખામણી કરો. આ પ્રયોગ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સૂઝી આવે છે?



"એકજ પાયા પરના અને સરખી ઉંચાઈના ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ બરાબર હોય છે."

સરખા પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના **अबक** અને **डईफ** એ ત્રિકોણો દોરો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. એ પરથી સરખા પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળના સંબંધમાં શું અનુમાન કરી શકો છો?



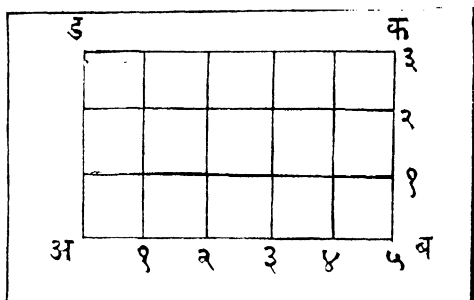
"સરખા પાયા પરના અને સરખી ઉંચાઇના ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ બરાબર હોય છે."

પ્રકરણ ૨.

(પ્રમેય.)

પ્રમેય ૨૬.

કોઇ પણ કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ તેની લંબાઈ અને ઉંચાઇના ગુણાકાર બરાબર હોય છે.



પક્ષ—अबकड એક કાટખુણ ચોખુણ છે.

સાધ્ય—अबकडનું ક્ષેત્રફળ = अब×बक.

સિદ્ધતા—ધારો કે अब લીટી क्ष (દાખલા તરીકે ૫) ઇંચ લાંબી છે, અને बक લીટી य (દાખલા તરીકે ૩) ઇંચ લાંબી છે.

અબના ઇંચ ઇંચના ભાગ પાડો. એવા ભાગ **ક્ષ** (૫) પડશે. એ ભાગ જ્યાં પડતા હોય તે બિંદુઓમાંથી **બક**ને સમાંતર લીટીઓ **કડ**ને મળતાં સુધી દોરો.

એજ પ્રમાણે **બક**ના ઇંચ ઇંચના ભાગ પાડો. એવા **ય** (૩) ભાગ પડશે. એ ભાગ જ્યાં પડતા હોય તે બિંદુઓમાંથી **અબ**ને સમાંતર લીટીઓ **અડ**ને મળતાં સુધી દોરો.

અબની લંબાઈ **ક્ષ** (૫) ઇંચ છે, માટે **અક** આકૃતિના **ક્ષ** ઉભા ભાગો અથવા કોઠા પડ્યા.

બકની લંબાઈ **ય** (૩) ઇંચ છે, માટે દરેક ઉભા કોઠામાં **ય** ભાગો સમાયા છે, અને તે દરેક એક ચોરસ ઇંચ જેટલો છે.

દરેક કોઠામાં **ય** ચોરસ ઇંચ છે, અને એવા **ક્ષ** કોઠા છે; માટે **અક** આકૃતિમાં ચોરસ ઇંચની કુલ સંખ્યા **ક્ષ**×**ય** છે.

∴ **અબકડ** આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ=**ક્ષ**×**ય** છે.

પણ **ક્ષ**=**અબ** અને **ય**=**બક**;

∴ **અબકડ** આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ = **અબ**×**બક**.

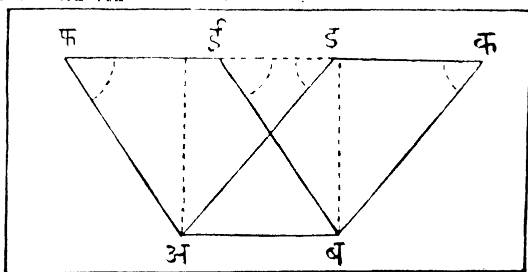
સૂચના—ઇંચને બદલે બીજો કોઈ લંબાઈનો એકમ લઈએ તોપણ ચાલે. જો લંબાઈ તથા પહોળાઈમાં અપૂર્ણાંક હોય, તો તે અપૂર્ણાંકોનો દઢભાજક હોય એવો નાનો એકમ લેવો, એટલે લંબાઈ તથા પહોળાઈના પૂર્ણ એકમ આવી રહેશે. દાખલા તરીકે, જો લંબાઈ $૭\frac{૧}{૩}$" અને પહોળાઈ $૩\frac{૧}{૫}$" હોય, તો એકમ $\frac{૧}{૧૫}$" લેવો.

પ્રમેય ૨૭.

એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો સરખા* હોય છે.

---

* **સરખા**—પ્રમેય ૨૯થી ૩૦ સુધીમાં અને તે પરના પ્રશ્નોમાં 'સરખા' એ શબ્દ જ્યારે આકૃતિઓના સંબંધમાં વપરાય ત્યારે તેનો અર્થ 'ક્ષેત્રફળમાં સરખા' એમ સમજવો.



પક્ષ—अबकड અને **अबईफ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો એકજ પાયા **अब** ઉપર અને એકજ ઉંચાઇના છે.

સાધ્ય—આ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા છે.

સિદ્ધતા—∵ આ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો એકજ ઉંચાઇના છે,

∴ □ **अबकड** અને □ **अबईफ** એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે છે. (પ્ર૦ ૨૩ પ્રશ્ન ૧).

∴ **कफ** એક સીધી લીટી છે, અને તે **अब**ને સમાન્તર છે.

હવે, ∵ **अड ॥ बक**,

∴ ∠**अडफ**=∠**बकई**. (પ્ર૦ ૬)

∵ **अफ ॥ बई**;

∴ ∠**अफड**=∠**बईक**. (પ્ર૦ ૬)

હવે ∵ **अफड** અને **बईक** ત્રિકોણોમાં

∠**अफड** =∠**बईक**;

∠**अडफ**=∠**बकई**;

अफ=**बई**; (પ્ર૦ ૨૨)

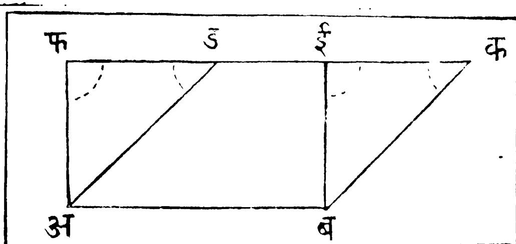
∴ △ **अफड** ≡ △ **बईक**. (પ્ર૦ ૧૧)

अबकफ આકૃતિમાંથી એક વખત **अफड** અને એક વખત **बईक** ત્રિકોણ બાદ કરો.

∴ બાકી રહેલા □ **अबकड**=□ **अबईफ**.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સરખા પાયા પરના અને સરખી ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો સરખા હોય છે. (કારણ કે તે એકજ પાયા પર અને તે પાયાની એકજ બાજુએ મૂકી શકાય છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્ર-ફળ પાયા અને ઉંચાઈના ગુણાકાર બરોબર હોય છે. (૨૭મા પ્રમેય પ્રમાણે, એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને કાટખુણ ચોખુણ બરોબર હોય છે; એ પરથી સિદ્ધતા સ્પષ્ટ થાય છે). [આકૃતિ જુઓ.]



સૂચના—ઉપલા પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા નીચે પ્રમાણે પણ અપાય છે:—

એકજ પાયા પરના અને એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો સરખા હોય છે.

જે આકૃતિઓ એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચે હોય, તે એકજ ઉંચાઈની હોય છે; માટે હવે પછી આવતા ૨૮થી ૩૦ સુધીના પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞામાં 'એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના' એ શબ્દોને બદલે 'એકજ ઉંચાઈના' એ શબ્દો મૂકવામાં આવશે.

૨૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. *આપેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ૩, ૫, ૬...... ૯૦ સરખા ભાગ કરો. કેટલી રીતે એમ કરી શકાશે?

૨. **अबकड** કાટખુણ ચોખુણના **अब** પાયા પર એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે તે કાટખુણ ચોખુણની બરોબર થાય, અને તેની પરિમિતિ આપેલી લંબાઈની થાય.

૩. આપેલા કાટખુણ ચોખુણ બરોબર એક સમભુજ ચતુષ્કોણ (રૉમ્બસ) દોરો.

૪. એક આપેલા કાટખુણ ચોખુણ બરોબરનો એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે તેની પાસપાસેની બાજુઓ એ આપેલી સીધી લીટીઓની બરોબર હોય.

૫. આપેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બરોબરનો એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે જેનો કર્ણ આપેલી લંબાઈનો હોય.

૬. આપેલા કાટખુણ ચોખુણ બરોબરનો એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણાની બરોબર હોય.

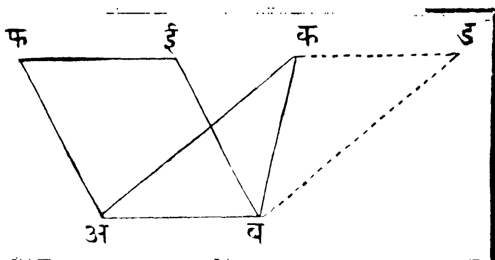
વ્યાખ્યા—કર્ણના કોઈ બિંદુમાંથી પાસપાસેની બાજુઓને સમાંતર દોરેલી અને બીજી બે બાજુઓને મળતાં સુધી લંબાવેલી લીટીઓ વડે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના જે ચાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો થાય છે, તેમાંથી જેમાં થઈને કર્ણ જતો હોય તેને '**કર્ણની આસપાસના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ**' કહે છે, અને બીજા બેને તેની '**પૂર્ણી**' કહે છે.

દેવકુળેકૃત યુક્લિડ.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણની આસપાસના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોની પૂર્ણીઓ એક બીજાની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૨૮.

ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઇના હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળથી અર્ધું હોય છે.



પક્ષ—**अबक** ત્રિકોણ અને **अबईफ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ **अब** પાયા પર અને એકજ ઉંચાઇના છે.

સાધ્ય—**अबक** ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ **अबईफ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળનું અર્ધું છે.

રચના—**अक**ને સમાંતર **बड** અને **अब**ને સમાંતર **कड** દોરો.

સિદ્ધતા—∵ **अई*** અને **अड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઇના છે, (પક્ષ)

∴ તે બરાબર છે. (પ્ર. ૨૭)

∵ **बक** કર્ણ **अबडक** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે, (પ્ર. ૨૨)

∴ **अबक** ત્રિકોણ **अड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અર્ધા બરોબર છે.

---

* કોઈ પણ સામસામેના બે ખુણાઓ આગળના અક્ષરો વડે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દર્શાવવાનો ચાલ છે.

પણ અડ □ = અઈ □.

∴ △ અબક = ½ □ અઈ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સરખા પાયા ઉપર અને એકજ ઉંચાઈના હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં અર્ધું હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પાયા તથા ઉંચાઈના ગુણાકારના અર્ધ બરાબર હોય છે.

૨૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. સમભુજ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના કર્ણોના ગુણાકારના અર્ધ બરાબર હોય છે.

૨. **અબકડ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની **અબ** અને **અડ** બાજુઓને **પ** અને **ચ** બિંદુઓમાં અનુક્રમે દુભાગી છે; તો બતાવી આપો કે **અપચ** ત્રિકોણ **અબકડ**ના ⅛ બરોબર છે.

૩. એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબરનો એક કાટખુણ ચોખુણ દોરો.

૪. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ **અબકડ**ની **અબ** અને **બક** બાજુમાં **પ** અને **ચ** કોઈ બિંદુઓ છે; તો બતાવો કે **કડપ** ત્રિકોણ **અડચ** ત્રિકોણની બરાબર છે.

૫. **અબકડ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં એક **ઓ** બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે

△ **ઓઅબ**+△ **ઓકડ**=½ **અબકડ**.

૬. **અબકડ** એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને **ઈ** એ **કડ**નું મધ્યબિંદુ છે. **અઈ** સાંધો અને બતાવો કે **અડઈ** ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ચતુર્થાંશ બરાબર છે.

૭. **અબકડ** ચતુષ્કોણમાં, **અબ** એ **કડ**ને સમાંતર છે;

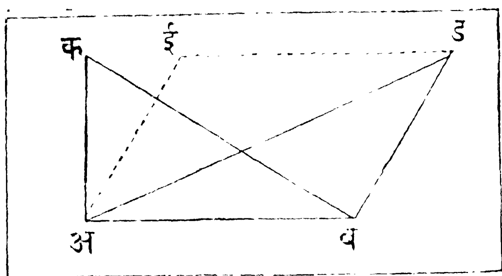
ઈ એ અડનું મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવો કે △ બઈક=½ અબકડ.

૮. જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણાની બરોબર હોય અને જે આપેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય, એવો તેજ ત્રિકોણના પાયા પર એક ત્રિકોણ અને એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૯. જે આપેલા ત્રિકોણની બરાબર હોય અને જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણા જેવડો હોય એવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક આપેલી લીટી પર દોરો.

પ્રમેય ૨૯.

એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના ત્રિકોણો સરખા હોય છે.



પક્ષ—એકજ પાયા अब પર અને એકજ ઉંચાઈના अबक અને अबड ત્રિકોણો છે.

સાધ્ય—તે સરખા છે.

રચના—बडને સમાંતર अई અને बअને સમાંતર डई દોરો.

સિદ્ધતા—∵ अबक △ અને अबडई ▱ એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના છે,

∴ अबक △ = ½ अबडई ▱. (પ્ર. ૨૮)

વળી કર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે, (પ્ર. ૨૨)

∴ अबड △ = ½ अबडई ▱.

∴ अबक △ = अबड △.

ઉપ૦—સરખા પાયા પરના એકજ ઉંચાઈવાળા ત્રિકોણો સરખા હોય છે.

૨૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. ત્રિકોણની કોઈ પણ મધ્યગા તે ત્રિકોણને દુભાગે છે.

૨. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अक** કર્ણ **बड** કર્ણને દુભાગે છે; તો બતાવો કે **अक** વડે તે ચતુષ્કોણના બે સરખા ત્રિકોણો થાય છે.

૩. **अबकड** ચતુષ્કોણના **अक** કર્ણનું મધ્યબિંદુ **ई** છે, તો બતાવો કે **अबईड=कबईड.**

૪. **अबक** ત્રિકોણની **अड** મધ્યગામાં **ई** એક બિંદુ છે, તો બતાવો કે △ **अबई**=△**अकई.**

૫. **अबक** ત્રિકોણના **बक** પાયાને સમાંતર **डई** દોરવામાં આવી છે, અને તે **अब** તથા **अक**ને **ड** તથા **ई** બિંદુમાં છેદે છે; તો બતાવો કે △**अबई**=△**अकड.**

૬. **अबक** ત્રિકોણના **बक** પાયાનું મધ્યબિંદુ **ई** છે, અને **बई**માં **फ** એક બિંદુ છે; **ईड** એ **अफ**ને સમાંતર દોરવામાં આવી છે અને **अक**ને **ड**માં મળે છે; તો બતાવો કે △ **डफक**= ½ △ **अबक.**

૭. એક આપેલા ત્રિકોણના પાયા પર આપેલા ત્રિકોણની બરોબરનો એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

૮. ગમે તે શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી એક લીટી વડે આપેલા ત્રિકોણના બે સરખા ભાગ કરો.

૯. એક આપેલા ત્રિકોણના પાયા પર તેની બરોબરનો એક બીજો એવો ત્રિકોણ દોરો, કે જેની એક બાજુ એક

આપેલી સીધી લીટીની બરાબર હોય.

૧૦. **અબક** ત્રિકોણના **બક** પાયા પર **અબક** ત્રિકોણની બરાબરનો એક એવો ત્રિકોણ દોરો, કે તેનું શિરોબિંદુ એક આપેલી લીટીમાં આવે. આવું ક્યારે નહિ બની શકે?

૧૧. આપેલા ત્રિકોણ બરાબર એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેનો એક ખુણો એક આપેલા ખુણા બરાબર હોય.

૧૨. બે બાજુઓ અને ક્ષેત્રફળ આપ્યાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૧૩. **અબક** ત્રિકોણની મધ્યગાઓનું છેદનબિંદુ **ग** છે, તો બતાવો કે $\triangle$ **गबक** $= \frac{1}{3}$ $\triangle$ **अबक**.

૧૪. આપેલા ત્રિકોણમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે તેમાંથી શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ (બાજુઓ સાથે) સરખા ત્રિકોણો બનાવે.

૧૫. ચતુષ્કોણના કોઈ શિરોબિંદુમાંથી એક લીટી દોરી તેના બે સરખા ભાગ કરો.

૧૬. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણોના છેદનબિંદુમાંથી કાઢેલી કોઈપણ લીટી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે.

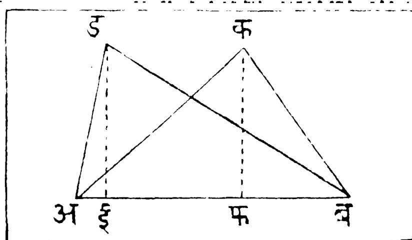
૧૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ પર લંબ દોરીને તે ચતુષ્કોણને દુભાગો.

૧૮. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુમાં આપેલા એક બિંદુમાંથી લીટી દોરી તે ચતુષ્કોણને દુભાગો.

૧૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની વધારેલી એક બાજુમાં આપેલા બિંદુમાંથી લીટી દોરી તે ચતુષ્કોણને દુભાગો.

પ્રમેય ૩૦.

એકજ પાયા પરના સરખા ત્રિકોણો એકજ ઉંચાઈના હોય છે.



પક્ષ—अबक ને अबड એ સરખા ત્રિકોણો છે, અને એકજ પાયા अब પર આવેલા છે. कफ અને डई એ ત્રિકોણોની ઉંચાઈ બતાવે છે.

સાધ્ય—डई=कफ.

સિદ્ધતા—△ अबक=$\frac{1}{2}$ अब×कफ; (પ્ર૦ ૨૮. ઉ૦ ૨)

અને △ अबड=$\frac{1}{2}$ अब×डई; (પ્ર૦ ૨૮. ઉ૦ ૨)

પરંતુ △ अबक=△ अबड; (પક્ષ)

∴ $\frac{1}{2}$ अब×डई=$\frac{1}{2}$ अब×कफ.

ઉપલા સમીકરણની સરખી બાજુઓમાંથી સાધારણ અવયવ $\frac{1}{2}$ अबને કાઢી લો.

∴ डई=कफ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—**સરખા પાયા પરના સરખા ત્રિકોણો એકજ ઉંચાઈના હોય છે.**

ઉપસિદ્ધાંત ૨—**એકજ પાયા પરના અથવા એકજ સીધી લીટીમાં આવેલા સરખા પાયા પરના, અને તેની એકજ બાજુ પર આવેલા બે ત્રિકોણો સરખા હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.**

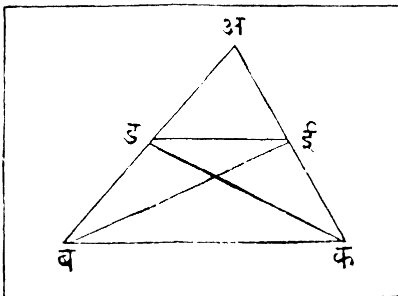
(કારણ કે પ્રમેય ૩૦ પ્રમાણે તે ત્રિકોણો એકજ ઉંચાઈના હોય છે, અને એકજ ઉંચાઈના ત્રિકોણો સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે આવેલા હોય છે).

(પ્ર. ૨૩. પ્રશ્ન ૧)

૩૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. ત્રિકોણની (બે) બાજુઓનાં મધ્ય બિંદુઓ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૨. નીચે આપેલી આકૃતિમાં, જો **अईब** △=**अडक** △ હોય, તો સિદ્ધ કરો કે **डई** એ **बक**ને સમાંતર છે.



૨૬થી ૩૦ સુધીના પ્રમેય પરના પરચુરણ પ્રશ્નો.

૧. જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુ બરોબર હોય, અને અંતર્ગુણાઓ એક બીજાના ન્યૂનતા-પૂરક હોય, તો તે ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા હોય છે.

૨. બે ત્રિકોણો એકજ પાયા પર છે, પણ એકની ઉંચાઈ બીજાની ઉંચાઈ કરતાં બમણી છે; તો સિદ્ધ કરો કે પહેલા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ બીજાના કરતાં બમણું છે.

૩. **अबकड** એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને **अक**માં એક **ई** બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **अबई** અને **अडई** ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા છે.

૪. જો કોઈ ચતુષ્કોણના કર્ણો વડે તેના ચાર સરખા ભાગ પડતા હોય, તો બતાવો કે તે ચતુષ્કોણ સમાંતર-બાજુ છે.

૫. સમભુજ ચતુષ્કોણની અંદર પડતા કોઈ પણ બિંદુ-

માંથી તેની બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો હંમેશાં એકજ હોય છે.

૬. એક કાટખુણુ ચોખુણુ અને એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણુ એકજ પાયા પર છે, અને તેમની પરિમિતિ પણ એકજ છે, અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણુનો એક ખુણો ૩૦ અંશનો છે; તો સાબીત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણુનું ક્ષેત્રફળ કાટખુણુ ચોખુણુના ક્ષેત્રફળ કરતાં અર્ધું છે.

૭. **अबकड** ટ્રાપીઝિઅમની* (સમલંબ ચોખુણુની) **बक** અને **अड** બાજુઓ અસમાંતર છે, અને **ई** તથા **फ** તે બાજુઓનાં અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે; તો બતાવી આપો કે એ બિંદુઓમાંથી સમાંતર બાજુઓ પર દોરેલા લંબો વડે થતો કાટખુણુ ચોખુણુ ટ્રાપીઝિઅમની (સમલંબ ચોખુણુની) બરોબર છે.

૮. **अबक** ત્રિકોણુની **बड** અને **कई** મધ્યગાઓ એક બીજીને **ग**માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે **अडगई** ચતુષ્કોણુ **बगक** ત્રિકોણુની બરોબર છે.

૯. **अबक** ત્રિકોણુના **बक** પાયામાં **ड** અને **ई** બિંદુઓ એવી રીતે લો કે **बड** તે **ईक** બરોબર થાય. **अड** અને **अई** સાંધો. **अब**ને **फ**માં મળે એમ **अक**ને સમાંતર **डफ** દોરો, અને **अक**ને **ग**માં મળે એમ **अब**ને સમાંતર **ईग** દોરો. હવે બતાવી આપો કે **अडफ** ત્રિકોણુ **अईग** ત્રિકોણુની બરોબર છે.

૧૦. **अबकड** ચોરસની **अब**, **बक**, **कड** અને **डअ** બાજુઓમાં **ई**, **फ**, **ग**, ને **ह** એવાં બિંદુઓ લીધાં છે કે ૨ **अई**=૩ **बफ**=૪ **कग**=૬ **डह**=ચોરસની એક બાજુ થાય;

* જે ચતુષ્કોણુની સામસામી બેજ બાજુઓ સમાંતર હોય તેને ટ્રાપીઝિઅમ અથવા સમલંબ ચોખુણુ કહે છે.

તો બતાવી આપો કે આપેલા ચોરસની બાજુના $\frac{3}{4}$ બરાબરની બાજુ પર દોરેલા ચોરસની બરોબર **ईफगह** છે.

૧૧. સમલંબ ચોખુણની સમાંતર બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી તે ચોખુણને દુભાગે છે, અને તે લીટીના મધ્યબિંદુમાંથી સમાંતર બાજુઓ સુધી દોરેલી કોઈ પણ લીટી તે સમલંબ ચોખુણને દુભાગે છે.

૧૨. ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધવાથી થએલો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ક્ષેત્રફળમાં તે ચતુષ્કોણના અર્ધ બરોબર હોય છે.

૧૩. એક આપેલી સીધી લીટી પર, બની શકે તો, આપેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બરોબરનો એક સમભુજ ચતુષ્કોણ દોરો.

૧૪. આપેલા ત્રિકોણની લાંબામાં લાંબી બાજુ પર તે ત્રિકોણ બરોબરનો એક સમભુજ ચતુષ્કોણ દોરો.

૧૫. એક ચોરસ અને તેની બરોબરના કાટખુણ ચોખુણની એક બાજુ આપેલાં છે; તો કાટખુણ ચોખુણની બીજી બાજુ શોધી કાઢો.

૧૬. **अब** પાયા પર સામસામી બાજુએ **अबकड** અને **अबक्षय** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે, અને (જરૂર પડે તો લંબાવીને) **अब** વડે **कक्ष**ને દુભાગવામાં આવી છે; તો બતાવી આપો કે બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો સરખા છે.

૧૭. ત્રિકોણની એક બાજુમાં આપેલા બિંદુમાંથી દોરેલી લીટી વડે ત્રિકોણને દુભાગો.

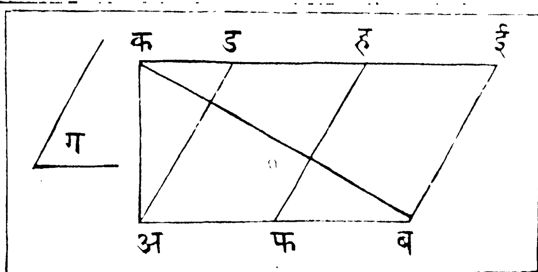


પ્રકરણ ૩.

(કૃત્યો).

કૃત્ય ૧૪.

આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક એવો સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેનો એક ખુણો આપેલા ખુણાની બરોબર હોય.



अबक આપેલો ત્રિકોણ છે, અને **ग** આપેલો ખુણો છે.

રચના—**अ** આગળ **ग** બરાબર **बअड** ખુણો કરો. **अब**ને સમાંતર **क**માંથી **कडई** લીટી દોરો. **ब**માંથી **अड**ને સમાંતર **बई** લીટી દોરો. **अब**ને **फ**માં દુભાગો. **फ**માંથી **अड**ને સમાંતર **फह** લીટી દોરો.

अफहड ઇષ્ટ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—∵ **अबक** ત્રિકોણ અને **अबईड** સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણ એકજ પાયા પર અને સમાંતરબાજુઓની એકજ જોડ વચ્ચે (સરખી ઉંચાઈના) છે,

∴ **अबक** △ = ½ **अबईड** ▱. (પ્ર૦ ૨૮)

∵ **अफ**=**फब**, અને **अब** ∥ **डई**,

∴ **अफहड** ▱ = **फबईह** ▱; (પ્ર૦ ૨૭ ઉ૦ ૧)

∴ **अफहड** ▱ = ½ **अबईड** ▱;

અને अबक △ = ½ अबईड ▱,

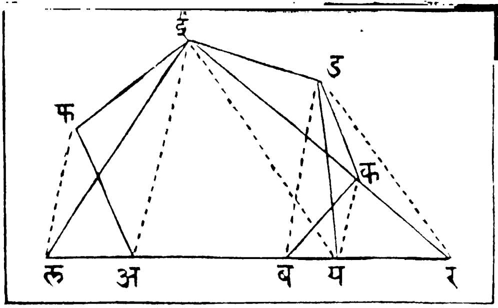
∴ अफहड ▱ = अबक △.

૧૪મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય.

કૃત્ય ૧૫.

જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણા બરોબર હોય એવો, આપેલી બહુકોણ આકૃતિ બરોબરનો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.



अबकडईफ એક બહુકોણ આકૃતિ છે.

રચના અને સિદ્ધતા—अबને બેઉ બાજુએ લંબાવો. **बड** સાંધો. **क**માંથી **डब**ને સમાંતર એક લીટી દોરો. ધારો કે તે લંબાવેલી **अब**ને **य**માં મળે છે. **डय** સાંધો.

∵ **डब ∥ कय** (રચના)

∴ △ **बडक** = △ **बडय** (પ્ર૦ ૨૯)

આ સરખા ત્રિકોણોમાં **अबडईफ** આકૃતિ ઉમેરો.

∴ **अबकडईफ = अयडईफ.**

अबकडईफ આકૃતિને ૭ બાજુઓ છે, પણ તેની બરા-

પર દોરેલી **अयडईफ** નવી આકૃતિને પાંચ બાજુઓ છે; અને જો ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણેની કૃતિ ફરી ફરીને કરવામાં આવશે, તો આકૃતિની બાજુઓમાંથી એક એક ઓછી થતી જશે, અને આખરે ત્રિકોણુની આકૃતિ બનશે.

પછી ૧૪મા કૃત્ય પ્રમાણેની રચના કરી ઇષ્ટ સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણુ બનાવો.



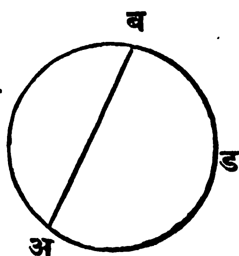
ખંડ ૨.

પ્રકરણુ ૧.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

વર્તુળ.

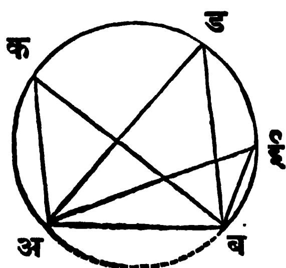
૧. પારિભાષિક શબ્દો.



વર્તુળના પરિધ પર **अ** ને **ब** બિંદુઓ લઈ **अब** જ્યા દોરેલી છે. **अब**ની સામસામી બાજુએ પરિધ પર **क** ને **ड** બિંદુઓ લીધાં છે. હવે **अकब** કૌંસ અને **अब** જ્યા વડે થએલી આકૃતિ **વર્તુળખંડ** કહેવાય છે. એજ પ્રમાણે **अडब** કૌંસ અને **अब** જ્યાથી થએલી આકૃતિ પણ વર્તુળખંડ કહેવાય છે.

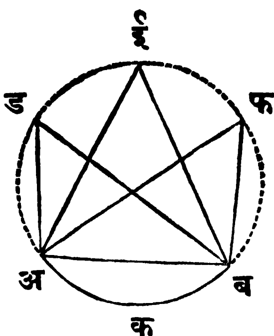
જ્યા અને તેણે કાપી કાઢેલા પરિધના ભાગથી થએલી આકૃતિને **વર્તુળખંડ** કહે છે.

એક જ્યાથી વર્તુળના જે બે વર્તુળખંડો થાય છે તેમાંથી પ્રત્યેકને બીજાનો **વ્યુત્ક્રમખંડ** કહે છે.



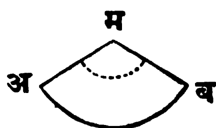
अकब વર્તુળખંડના પરિધ પર **क, ड, ई,**...બિંદુઓ લીધાં છે, ને તેમને **अ** અને **ब** સાથે સાંધ્યાં છે. આવી રીતે થએલા **अकब, अडब, अईब**...ખુણાઓને વર્તુળ-ખંડમાંના ખુણા કહે છે.

વર્તુળખંડના કૌંસ પરના કોઈ બિંદુમાંથી જ્યાના બે છેડાનાં બે બિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓ વડે થએલા ખુણાને **વર્તુળ-ખંડમાંનો ખુણો** કહે છે.

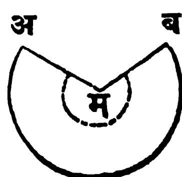


अकब કૌંસ છે. પરિધના બાકીના ભાગ પર **ड, ई, फ**.... બિંદુઓ લીધાં છે. **अड, डब, अई, ईब, अफ, फब** સાંધો. **अडब, अईब, अफब** ખુણાઓને પરિધિકોણ (એટલે **अकब** કૌંસની સામે આવેલા પરિધ પરનાં બિંદુ આગળના ખુણા) કહે છે.

કૌંસના છેડાનાં બે બિંદુઓમાંથી પરિધના બાકીના ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓથી થતો ખુણો તે કૌંસ ઉપરનો **પરિધિકોણ** કહેવાય છે.



વર્તુળનો ગમે તે **अब** કૌંસ લો. **म** મધ્યબિંદુ છે એમ સમજો. **अम** તથા **मब** સાંધો. **अमब** ખુણો મધ્યકોણ (મધ્યબિંદુ આગળનો ખુણો) કહેવાય છે. **अम, मब** સાંધવાથી **म** બિંદુ આગળ જે (જોડેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે એક સાદો અને એક બહિર્વક્ર) બે ખુણા થાય છે, તેમાંથી જે ખુણો જે કૌંસની સામે આવેલો હોય છે તે ખુણો

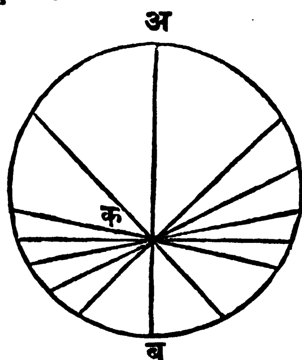


તે કૌંસ પરનો મધ્યકોણ કહેવાય છે. પાસેની આકૃતિમાં ટપકાં વડે દર્શાવેલો બહિર્વક્ર ખુણો **अब** કૌંસ પરનો મધ્યકોણ છે.

મધ્યબિંદુમાંથી કૌંસના છેડાનાં બે બિંદુઓ સુધી કાઢેલી લીટીઓથી થતો ખુણો તે કૌંસ પરનો **મધ્યકોણ** કહેવાય છે.

વ્યાસ તથા તેની સાથે જુદા જુદા ખુણા કરનારી જ્યાઓ વિષે.

अब વ્યાસમાં મધ્યબિંદુ સિવાયનું એક **क** બિંદુ લો. **क** બિંદુમાંથી **अब** સાથે તિર્યક્કોણ કરનારી એક જ્યા દોરો. એ તિર્યક્કોણ કરતાં નાનો તિર્યક્કોણ કરે એવી એક બીજી જ્યા **क**માંથી દોરો. એ કરતાં પણ નાનો તિર્યક્કોણ કરનારી વળી બીજી જ્યા **क**માંથી દોરો......૪૦ આ પ્રમાણે **अब** સાથે જ્યાએ કરેલો ખુણો કાટખુણો થાય ત્યાંસુધી નાનો



ને નાનો તિર્યક્કોણ કરતી જાય એવી જુદી જુદી જ્યાઓ દોરો. હવે વ્યાસ વડે જ્યાના જે બે ભાગ થાય છે તેનું ગુણોત્તર, અને **अब** સાથે જ્યા જે ખુણો કરે છે તેના ઓછાવત્તા તિર્યક્પણા વચ્ચે કંઈ સંબંધ છે કે નહિ તે જુઓ. (વ્યાસ સાથે સૌથી મોટો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના બે ભાગ માપો. તેથી ઓછો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના બે ભાગ માપો. એમ બીજી નાનો ને નાનો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના ભાગ માપો. તમારા સમજવામાં શું આવે છે? " વ્યાસ સાથે સૌથી મોટો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના જે બે ભાગ પડે છે, તેમાં એક ભાગ બીજા કરતાં ઘણો મોટો છે. વ્યાસ સાથે તેથી નાનો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના બે ભાગો એટલા વિષમ નથી....૪૦

જે જ્યા વ્યાસ સાથે કાટખુણેા કરે છે તેના ભાગેા સરખા છે." આ પરથી તમે શું અનુમાન કરેા છેા?

"વ્યાસ સાથે જ્યાએ કરેલેા ખુણેા જેમ મેાટેા, તેમ તે જ્યાના બે ભાગેા વચ્ચે વિષમતા વધારે. જ્યારે આ ખુણેા કાટખુણેા હેાય, ત્યારે બે ભાગેા બરેાબર હેાય."

ઉપલી આકૃતિમાં **ક**માંથી પરિધ સુધી દેારેલી બીજી લીટીએા સાથે **અક, કબ** સરખાવેા, અને જુએા કે કઈ મેાટામાં મેાટી છે ને કઈ નાનામાં નાની છે. "**અક** મેાટામાં મેાટી છે, ને **બક** નાનામાં નાની છે." આ પરથી કયેા સામાન્ય નિયમ નીકળે છે તે કહેા.

"વર્તુળના વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કેાઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી જેટલી લીટીએા દેારવામાં આવે, તે સઘળીમાં મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થનારી લીટી સૈાથી મેાટી હેાય છે, અને તેથી ઉલટી દિશામાં જનારી લીટી સૈાથી નાની હેાય છે."

ઉપર આપેલી આકૃતિમાં **અક** અથવા **બક** સાથે સરખા ખુણાએા કરનારી લીટીએા દેારેા, અને તેમને સરખાવેા. શું માલમ પડે છે? એ પરથી કયેા સામાન્ય નિયમ તમે ઉપજાવી શકેા છેા?

"વર્તુળના વ્યાસમાંના કેાઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દેારેલી અને વ્યાસ સાથે સરખા ખુણાએા કરનારી લીટીએા સરખી હેાય છે."

એજ આકૃતિમાં **અબ**માં આવેલા મધ્યબિંદુ સિવાયના કેાઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી એક લીટી દેારેા. એજ બિંદુમાંથી પહેલી લીટી બરેાબરની બીજી લીટીએા પરિધ સુધી દેારેા. આવી લીટીએા કેટલી દેારી શકાય તેનેા નિશ્ચય કેવી રીતે કરી શકશેા? "તે બિંદુને મધ્યબિંદુ તરીકે લઈ

અને આપેલી લીટી બરોબરની ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો." માગી છે તેવી કેટલી લીટી દોરી શકાશે? "બે." તે બંને વ્યાસની એકજ બાજુએ દોરી શકાય ખરી? "ના." (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળ્યો?

"વર્તુળના વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિઘ સુધી ફક્ત બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય, અને તે બે લીટીઓ વ્યાસની સામસામી બાજુએ આવે."

આવી સરખી લીટીઓ દોરો. વ્યાસ સાથે તે બંને જે ખુણાઓ કરે તેનું માપ લો. શું માલમ પડે છે? (પુ૦). એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ ઉપજાવાય?

"વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિઘ સુધી દોરેલી સરખી લીટીઓ વ્યાસ સાથે સરખા ખુણાઓ કરે છે."

अबમાંના **क** (અથવા મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ બીજા) બિંદુમાંથી પરિઘ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખાવો, અને આ લીટીઓની લંબાઈ, અને વ્યાસના નાના ભાગ સાથે તેઓ જે ખુણાઓ કરે છે તેના મહત્ત્વ વચ્ચે કંઈ સંબંધ છે કે નહિ તે જુઓ.

"વર્તુળના વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિઘ સુધી દોરેલી લીટી, તેણે વ્યાસના નાના ભાગ સાથે કરેલા ખુણાના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં હોય છે (એટલે કે જેમ ખુણો મોટો, તેમ તે લીટીની લંબાઈ વધારે)."

એક વર્તુળને તેના મધ્યબિંદુમાં થઈને વળ જાય એમ વાળી વ્યાસ બનાવો. વ્યાસમાં ગમે તે એક બિંદુ લો, અને વર્તુળને ફરીથી વાળીને એ બિંદુમાંથી સામસામી બાજુએ

વ્યાસ પર લંબો પાડો. આ લંબો સરખા માલમ પડે છે. (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ ઉપજાવી શકો છો ?

વ્યાસમાં ગમે તે એક બિંદુ લો, અને તેમાંથી વ્યાસ સાથે કાટખુણો કરે એવી પરિધ સુધીની લીટી દોરો. આ લીટીના બે ભાગ સરખાવો. (પુ૦). તમને શું માલમ પડે છે ?

"જો વ્યાસ જ્યા સાથે કાટખુણો કરતો હોય, તો તે જ્યાને દુભાગે છે."

એક વર્તુળમાં **अब** જ્યા દોરો. તેને **क**માં દુભાગો. **क**ને મધ્યબિંદુ **म** સાથે સાંધો. **मकअ** અને **मकब** ખુણાઓ માપો. તેમનું મહત્ત્વ કેવડું છે ? "કાટખુણા જેવડું." (પુ૦). આ પરથી તમે શું શીખો છો ?

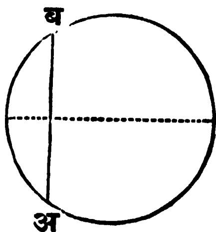
"જો વ્યાસ જ્યાને દુભાગતો હોય, તો તે જ્યા સાથે કાટખુણો કરે છે."

ઉપલા પ્રયોગ ઉપરથી જ્યાને દુભાગનાર લંબની અને મધ્યબિંદુની સ્થિતિ વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ ?

"જ્યાને દુભાગનાર લંબને બંને બાજુ તરફથી પરિધ સુધી લંબાવવામાં આવે, તો તે વર્તુળનો વ્યાસ બને છે, એટલે કે જ્યાને દુભાગનાર લંબમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ હોય છે."

૩. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ.

એક કાગળ પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ લીટી દોરી બનાવેલા વર્તુળમાં એક **अब** જ્યા દોરો. **अ** બિંદુ **ब** પર પડે એમ **अब** જ્યાને અને અલબત વર્તુળને પણ વાળો. વર્તુળના બંને ભાગો એક બીજા પર બંધબેસતા આવી રહે છે ? "હા."



પડેલા સળે **अब** સાથે કરેલા ખુણાનું મહત્ત્વ કેટલું છે ? " કાટખુણા જેટલું. " (૫૦). આ પરથી **अब** જ્યા અને સળની લીટી વચ્ચે કેવો સંબંધ માલમ પડે છે ? " તે **अब** જ્યાને કાટખુણે દુભાગે છે. "

વાળવાથી વર્તુળના જે બે ભાગ પડે છે, તે એક બીજા સાથે બરોબર બંધએસતા હોય, તો વર્તુળનું મધ્યબિંદુ ક્યાં હોવું જોઈએ ? " સળની લીટીમાં, એટલે કે **अब** જ્યાને દુભાગનાર લંબમાં. " આ લંબમાં ક્યાં ? " મધ્યભાગે. "

આ પરથી વર્તુળનું મધ્યબિંદુ શોધી કાઢવા સંબંધમાં આપણે શું શાખીએ છીએ ?

એ વર્તુળમાં એક બીજી **कड** જ્યા દોરો. આ જ્યાને દુભાગનાર લંબ દોરો. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ આ લીટીમાં છે ? " હા. "

જો આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **अब**ને દુભાગનાર લંબમાં અને **कड**ને દુભાગનાર લંબમાં પણ છે, તો મધ્યબિંદુ કયું હોવું જોઈએ ? " આ બે લીટીઓનું છેદનબિંદુ. " આ પરથી વર્તુળનું મધ્યબિંદુ શોધી કાઢવાની રીત ઉપજાવો.

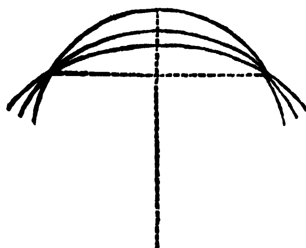
બાજુ પર આપેલો કૌંસ જે વર્તુળનો ભાગ હોય તે વર્તુળ કાઢવું હોય તો શી રીતે કાઢશો ? આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ કેવી રીતે કાઢશો ? ધારો કે એક ટપકાંવાળી લીટી વર્તુળનો બાકીનો ભાગ બતાવે છે. આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ ઉપર વર્ણવેલી રીતે કયે પ્રકારે શોધી કાઢશો ? " **પરિઘ પર ત્રણ બિંદુ લઈ અથવા બે જ્યા દોરી......ઈ૦.** "



આપેલા કૌંસમાં તેજ ત્રણ બિંદુઓ લો અથવા બે જ્યા દોરો, અને તે બંને જ્યાને દુભાગનાર લંબ દોરો.

પાસે એક બીજાને છેદનાર કૌંસો આપેલા છે. એ

કૈાંસોની નકલ દોરો અને જે વર્તુળના તે ભાગ હોય તે વર્તુળ પુરા દોરો.



૪. સમાન મધ્યકોણુ, કૈાંસ, અને જ્યા.

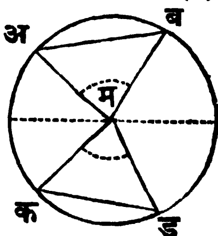
એક વર્તુળ દોરો અને તેમાં બે સરખા મધ્યકોણુ કરો. આમાંનો એક મધ્યકોણુ જે કૈાંસ પર હોય તે કૈાંસને કાપીને બીજા પર મૂકો, અને બંને કૈાંસો તથા તેમની જ્યાઓ સરખાવો.

આ ઉપરથી સરખા મધ્યકોણુની સામે આવેલા કૈાંસો સંબંધમાં તેમજ સરખા કૈાંસોની જ્યા સંબંધમાં ક્યા સામાન્ય નિયમ ઉપર તમે ઉતરો છો ?

“ જો કોઈ વર્તુળમાં, બે કૈાંસોની સામે આવેલા મધ્યકોણુો સરખા હોય, તો તે કૈાંસો અને તે કૈાંસો-ને કાપી કાઢનાર જ્યાઓ સમાન હોય છે. ”

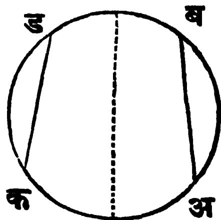
બે સરખાં વર્તુળો દોરો. એકના મધ્યકોણુને બીજાના મધ્યકોણુ કરતાં બમણો રાખો. જે બે કૈાંસો પર એ ખુણાઓ આવેલા છે, તેમાંથી નાના કૈાંસને કાપી કાઢો અને મોટા પર મૂકીને તેની સાથે સરખાવી જુઓ. શું માલમ પડે છે ? (પુ).

એક વર્તુળમાં **अब** અને **कड** બે સરખા કૈાંસો લો. **अ, ब, क, ड** બિંદુઓમાંથી મધ્યબિંદુ **म** સુધી લીટીઓ દોરો. **अब** કૈાંસ **कड** કૈાંસ ઉપર પડે એવી રીતે વર્તુળને વાળો. સળ **म** બિંદુમાં થઈને પસાર થાય



છે. હવે જ્યારે સળ **म** બિંદુમાં થઈને જાય છે, અને **अ** બિંદુ **क** ઉપર અને **ब** બિંદુ **ड** ઉપર પડે છે, ત્યારે તો એ પણ જોવામાં આવશે કે **अम** લીટી **कम** ઉપર અને **बम** લીટી **डम** ઉપર બરાબર પડી રહે છે. આ પરથી એજ ઠરે છે કે **अमब** ખુણો **कमड** ખુણાની બરાબર છે. એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

"સરખા કૌંસો સામેના મધ્યકોણો સરખા હોય છે."



એક વર્તુળ દોરો. તેમાં **अब** ને **कड** એ સરખી જ્યા લો. **अब** લીટી **कड** પર પડે એવી રીતે વર્તુળને વાળો. તમને માલમ પડશે કે **अब** કૌંસ **कड** કૌંસની બરોબર છે. વર્તુળખંડ **अब** કાપી કાઢો અને **कड** ઉપર મૂકો. (૫૦). આ પ્રયોગ ઉપરથી કયો નિયમ તમે ઉપજાવી શકો છો ?

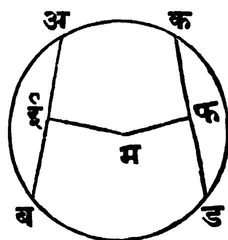
"સરખી જ્યાઓ સરખા કૌંસો કાપી કાઢે છે, અને સરખી જ્યાઓ વડે વર્તુળના જે વર્તુળખંડ પડે છે તે પણ સરખા હોય છે."

એક વર્તુળમાં એક જ્યાથી બીજી બમણી હોય એવી બે જ્યાઓ લો, અને તેમણે કાપી કાઢેલા કૌંસો સરખાવો. જ્યાઓએ કાપી કાઢેલા કૌંસો જ્યાના પ્રમાણમાં છે ? "ના."

એક વર્તુળમાં એક કૌંસ બીજાથી બમણો લો, અને તેમની જ્યાઓ સરખાવો. કૌંસોની જ્યાઓ કૌંસોના પ્રમાણમાં છે ? "ના."

મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યાઓ.

મધ્યબિંદુ **म**માંથી **अब** અને **कड** જ્યા ઉપર **मई** અને



मफ લંબો દોરેલા છે, અને **ईम** તે **मफ**ની બરોબર છે. **ईम** લીટી **मफ** ઉપર પડે એવી રીતે **म** બિંદુમાંથી વર્તુળને વાળો. સળ તે વર્તુળના બે સરખા ભાગ કરશે.

હવે ∵ **ईम=फम,**

∴ **ई** બિંદુ **फ** પર પડશે.

∵ **∠मईअ = ∠मफक,**

∴ **अब** લીટી **कड**ની દિશામાં પડશે.

પરંતુ **म** મધ્યબિંદુ છે, માટે **अब** તરફનું અર્ધવર્તુળ **कड** તરફના અર્ધવર્તુળ ઉપર પડશે; અને **अ, ब, क, ड** પરિધ ઉપર હોવાથી, **अ** બિંદુ **क** ઉપર અને **ब** બિંદુ **ड** ઉપર પડશે. (એટલે કે **अब** કૌંસ **कड** કૌંસ ઉપર પડશે).

∴ **अब** જ્યા = **कड** જ્યા.

अब અને **कड** જ્યા માપો, અને તેની સરખામણી કરો. શું માલમ પડે છે? (પુ૦).

આ ઉપરથી એકજ વર્તુળમાં મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યા સંબંધમાં કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

“ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યાઓ સરખી હોય છે. ”

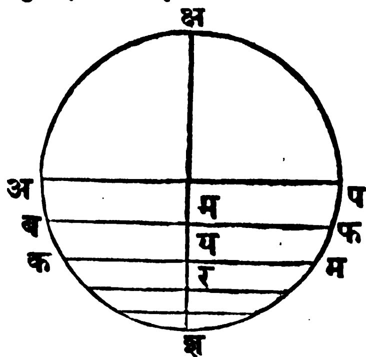
अबकड વર્તુળમાં **अब** અને **कड** બે સરખી જ્યાઓ દોરો. તે બંને પર મધ્યબિંદુ **म**માંથી **मई** ને **मफ** લંબો દોરો. **मई** ને **मफ** માપો. (પુ૦).

આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુથી સરખી જ્યાઓનાં અંતર સંબંધમાં કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“ વર્તુળની સરખી જ્યાઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે. ”

૫. સ્પર્શલીટીઓ.

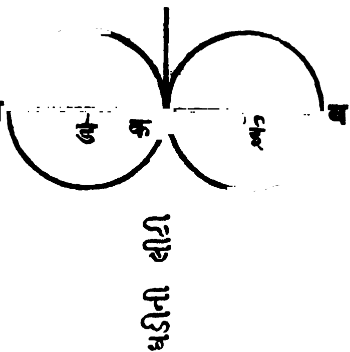
म એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને **क्षमज्ञ** તેનો વ્યાસ છે. **अमप; बयफ**...... લીટીઓ વ્યાસથી કાટખુણે દોરેલી છે. આ લીટીઓના થએલા એકજ તરફના ભાગોને સરખાવતાં શું જોવામાં આવે છે? "**बय** લીટી **अम** કરતાં નાની છે......૪૦." જેમ જેમ આ ભાગો મધ્યબિંદુથી



દૂર હોય છે, તેમ તેમ તે વધારે નાના હોય છે. વ્યાસમાંથી પસાર થતી એવી એકે લીટી છે, કે જેનો જરા પણ ભાગ વર્તુળની અંદર ન પડતો હોય? "**ज्ञ**માંથી **क्षज्ञ** પર લંબ રૂપે દોરેલી લીટી." (તેજ પ્રમાણે **क्ष**માંથી **क्षज्ञ** પર લંબ રૂપે દોરેલી લીટી.) આ લીટી વર્તુળને છેદતી નથી, પણ તેને માત્ર સ્પર્શ કરે છે; તેથી એ સ્પર્શલીટી કહેવાય છે. જો આ લીટી વ્યાસથી કાટખુણે દોરવામાં ન આવે, તો શું પરિણામ આવશે? એવી લીટીઓ દોરો અને તપાસો. "આ લીટીઓનો ડાબો અથવા જમણો ભાગ વર્તુળમાં થઈને જાય છે અથવા વર્તુળમાંજ પડે છે. માટે (વ્યાસના છેડામાંથી પસાર થતી) જે લીટીઓ વ્યાસથી કાટખુણે નથી, તે વર્તુળને છેદે છે; તેથી તેઓ વર્તુળને સ્પર્શ કરતી નથી એ ખુલ્લુંજ છે. આ કારણ-થી, જે લીટી વ્યાસના છેડા આગળ વ્યાસ સાથે કાટખુણો કરે છે, તે સ્પર્શલીટી કહેવાય છે.

વ્યાખ્યા—જે લીટી વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે પણ લંબાવ-વાથી તેને છેદતી નથી, તે **સ્પર્શલીટી** કહેવાય છે.

એક સીધી લીટી **अब** લો. તેને **क** બિંદુમાં દુભાગો. આ દરેક ભાગને પાછો **ड** અને **ई** બિંદુઓમાં દુભાગો. **ड** મધ્યબિંદુ લઈને **डक** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો, અને **ई** મધ્યબિંદુ લઈ **ईक** ત્રિજ્યાએ એક બીજું વર્તુળ દોરો.



બંને વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ સરખી છે; માટે બંને વર્તુળો બરાબર છે.

कब લીટી **कअ** ઉપર પડે એવી રીતે **क** બિંદુ આગળથી કાગળ વાળો. હવે **कड** લીટી **कई**ની બરોબર છે, માટે **ई** બિંદુ **ड** પર પડશે.

બંને વર્તુળો સરખાં છે, અને એકનું મધ્યબિંદુ બીજાના મધ્યબિંદુ પર પડે છે; માટે તેના પરિઘો પણ એક બીજા પર આવી રહેશે.

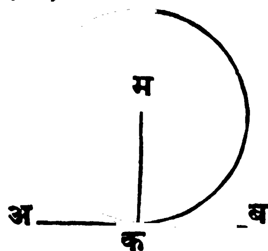
સળની લીટી એ વર્તુળોની વચ્ચે છે. આ લીટીમાં અને બંને વર્તુળમાં સામાન્ય હોય એવું ફક્ત **क** બિંદુ છે. એ પરથી ખુલ્લું માલમ પડે છે કે બંને વર્તુળો એક બીજાને કેવળ સ્પર્શજ કરે છે, અને ઉપર કહેલી લીટી વર્તુળોને કેવળ સ્પર્શ કરે છે. (આ લીટી અમુક વર્તુળમાંથી પસાર થાય છે એમ કહી શકાશે? "ના".)

આ લીટી **अक** અને **बक** સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? "કાટખુણો." આ ઉપરથી સ્પર્શલીટી દોરવા માટે કયો નિયમ ઉપજાવી શકો છો?

કેટલીક સ્પર્શલીટીઓ દોરો, અને વર્તુળને જ્યાં તે સ્પર્શ કરે છે તે સ્પર્શબિંદુઓમાંથી વ્યાસો દોરો. સ્પર્શલીટીઓ

વ્યાસ સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? (પુ૦).

પાસેની આકૃતિમાં વર્તુળ **अब** લીટીને સ્પર્શ કરે છે. વર્તુળના પરિધ ઉપરનાં સઘળાં બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે. હવે, જ્યારે સ્પર્શલીટીમાંનું એકજ બિંદુ વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે, અને



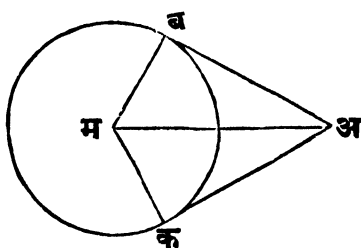
બીજાં બધાં બિંદુઓ પરિધથી દૂર છે, ત્યારે તો ખુલ્લુંજ માલમ પડે છે કે લીટીના જે બિંદુમાં વર્તુળ તે લીટીને સ્પર્શ કરે છે, તે તે લીટીના બીજા કોઈ પણ બિંદુ કરતાં મધ્ય-બિંદુની વધારે નજદીક છે. પણ **म**થી **अब** સુધીનું ટુંકામાં ટુંકું અંતર **म** બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલો લંબ છે. માટે, એ ખુલ્લુંજ છે કે **अब** લીટી **मक** ત્રિજ્યા સાથે કાટખુણો કરે છે.

આ પ્રયોગો પરથી નીચેનો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે.

"જે બિંદુ આગળ સ્પર્શલીટી વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે, તે બિંદુમાંથી જનારી ત્રિજ્યા સ્પર્શલીટીને કાટખુણે હોય છે."

વર્તુળ બહારના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બને તેટલી લીટીઓ દોરો. કેટલી સ્પર્શલીટીઓ દોરી શકાશે? "બે."

अમાંથી **अब**, **अक** બે સ્પર્શલીટીઓ દોરો. **म** મધ્યબિંદુ છે. **अम** સાંધો. **अब**, **अक** માપો. તેમને સરખાવો. **बअम** ખુણો માપો, અને **कअम** ખુણો



પણ માપો. બંને ખુણા સરખાવો. **बमअ** અને **कमअ** ખુણાઓ માપો અને તેમને સરખાવો. (પુ૦). આ ઉપરથી સામાન્ય નિયમ કયો નીકળે છે?

"બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બેજ લીટીઓ દોરી શકાય; આ સ્પર્શલીટીઓ સરખી હોય છે; અને બહારના બિંદુને તથા મધ્યબિંદુને જોડનાર લીટી સાથે જે ખુણાઓ તે સ્પર્શલીટીઓ કરે છે તે સરખા હોય છે."

૬. એક બીજાને સ્પર્શ કરતાં વર્તુળો.

એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે એવાં બે વર્તુળો દોરો. તેમનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધો. તેમને સાંધનારી લીટી સ્પર્શબિંદુમાં થઈને જાય છે કે તેની બહારથી? "સ્પર્શબિંદુમાં થઈને." એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરે એવાં બે વર્તુળો દોરો, અને ઉપલો પ્રયોગ કરી જુઓ. (પુ૦). એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ કાઢી શકો છો?

એક **अब** લીટી લો. **अ** મધ્યબિંદુ લઈને **अब** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. **अब**માં ગમે તે એક **क** બિંદુ લો. **क** મધ્યબિંદુ લઈને **कब** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળો જે ભાગમાં એક બીજાને સ્પર્શ કરે છે તે ભાગની લંબાઈ કેટલી છે? "બિંદુ." જો ઉપલા પ્રયોગમાં **क** બિંદુ **अब** લીટીની બહાર લેવામાં આવે, અને **कब** ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરવામાં આવે, તો તે વર્તુળ પહેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરશે કે છેદશે? "તે વર્તુળને છેદશે." આ પરથી એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરતાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટી ક્યા બિંદુમાં થઈને જાય છે, તે સંબંધમાં કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે? **अब**ને લંબાવી વધારેલા ભાગમાં **क** બિંદુ લો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. અંદરથી અથવા

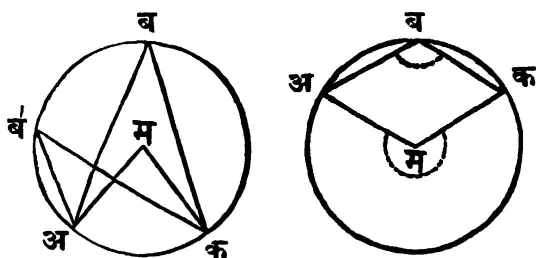
બહારથી એક બીજાને સ્પર્શ કરતાં વર્તુળો સંબંધમાં આ અને આગલા પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ ઉપજાવી શકો છો ?

"બે વર્તુળો એક બીજાને એકજ બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે, અને તેમનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સ્પર્શબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે."

૭. એક બીજાને છેદતાં વર્તુળો.

એક બીજાને છેદતાં હોય એવાં બે વર્તુળો દોરો. જે બિંદુઓમાં તેઓ એક બીજાને છેદે છે તે બિંદુઓ સાંધો. તે વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટી સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? "કાટખુણો." બીજી લીટી વડે પહેલીના જે બે ભાગ થાય છે તેને સરખાવો. શું માલમ પડે છે? "બંને સરખા છે."

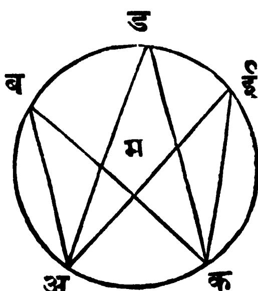
૮. કૌંસ સામેના મધ્યકોણો તથા પરિધિકોણો.



અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો એક **अक** કૌંસ લો. એ કૌંસ પર પરિધના બાકીના ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ એક **अबक** ખુણો કરો. કૌંસના છેડા **अ** તથા **क**ને મધ્યબિંદુ **म** સાથે સાંધો. **अबक** અને **अमक** માપો અને તેમને સરખાવો. અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો કૌંસ લો, અને ઉપર પ્રમાણેજ પ્રયોગ કરી જુઓ. એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

"કોઈ પણ કૌંસની સામેના મધ્યકોણ તેજ કૌંસ સામેના પરિધિકોણ કરતાં બમણો હોય છે."

अक કૌંસ પર **अबक, अडक, अईक**...એવા ગમે તેટલા ખુણાઓ કાઢો. આ ખુણાઓ મધ્યકોણ **अमक**ના અર્ધ જેવડા છે. આ પરથી **अबक, अडक, अईक**... વગેરે ખુણાઓના પરસ્પર પ્રમાણ વિષે શું સમજાય છે? "તે બધા સરખા છે." તે સઘળા એકજ કૌંસ ઉપરના પરિધિકોણો છે; માટે એકજ અથવા સરખા કૌંસ પરના પરિધિકોણો સંબંધમાં કયા સામાન્ય નિયમ પર તમે ઉતરો છો?



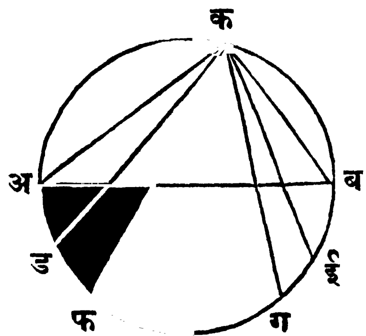
"એકજ કૌંસ અથવા સરખા કૌંસો ઉપરના બધા પરિધિકોણો સરખા હોય છે."

૯. વર્તુળખંડોમાંના ખુણાઓ.

એક અર્ધવર્તુળમાં ત્રણ ચાર પરિધિકોણો કાઢો. તેમને માપો. શું માલમ પડે છે? "તે સઘળા કાટખુણા છે."

અર્ધવર્તુળ ઉપર ત્રિકોણમાપ (સેટ સ્કવેર) એવી રીતે ગોઠવો કે કાટખુણો કરનારી એક બાજુ વ્યાસના એક છેડા પર પડે અને કાટખુણાનું શિરોબિંદુ પરિધના કોઈ પણ ભાગ પર પડે. તે ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ અર્ધવર્તુળ પરના કયા બિંદુને સ્પર્શે કરે છે? "વ્યાસના બીજા છેડાને." આ પરથી અર્ધવર્તુળમાંના ખુણા સંબંધી કયો નિયમ નીકળે છે?

"અર્ધવર્તુળમાંના સઘળા ખુણાઓ કાટખુણા છે."

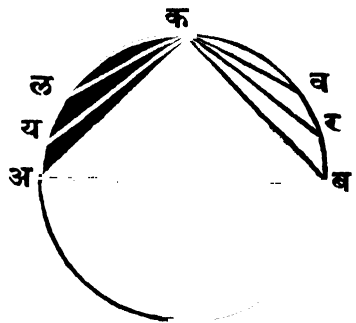


अब વ્યાસની ઉપલી બાજુએ પરિઘ પર એક **क** બિંદુ લો. વ્યાસની નીચેની બાજુએ પરિઘ પર **ड** અને **ई** બિંદુઓ લો. **डकइ** વર્તુળખંડ **अकब** કરતાં મોટો છે કે નાનો ? "મોટો." **डक** તથા **ईक** સાંધો. **डकई** ખુણો **अकब** કાટખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો ? "નાનો."

डई નીચે પરિઘ પર **फ** અને **ग** બિંદુઓ લો. વર્તુળખંડ **फकग**, **डकई** કરતાં મોટો છે કે નાનો ? "મોટો." **फकग** ખુણો **डकई** ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો? "નાનો." (પુ૦).

આ પરથી વર્તુળખંડ જેમ જેમ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો થતો જાય, તેમ તેમ વર્તુળખંડમાંના ખુણાઓના મહત્ત્વમાં કેવો ફેરફાર થાય છે, તે સંબંધમાં શું સમજવામાં આવે છે ?

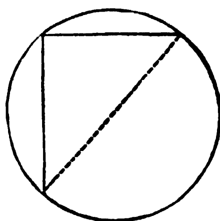
"જેમ જેમ વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો હોય છે, તેમ તેમ તે વર્તુળખંડનો ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો હોય છે."



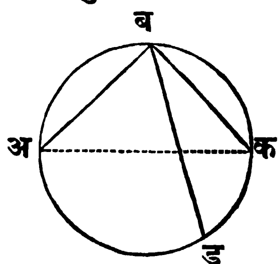
अब વ્યાસ છે. **अब**ની ઉપલી બાજુએ પરિઘ પર **य** અને **र** ગમે તે બિંદુઓ લો. **यक** અને **रक** સાંધો. **यकर** વર્તુળખંડ **अकब** કરતાં મોટો છે કે નાનો ? "નાનો." **यकर** ખુણો **अकब** કાટખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો ? "મોટો." **यर**ની ઉપલી બાજુએ

પરિધિ પર **લ** અને **વ** બિંદુઓ લો. **લક** તથા **વક** સાંધો. **લકવ** વર્તુળખંડ **યકર** કરતાં મોટો છે કે નાનો ? "નાનો." **લકવ** ખુણો **યકર** ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો ? "મોટો." (પુ૦). જેમ જેમ વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો ને નાનો થતો જાય છે, તેમ તેમ પરિધિ આગળના ખુણાના મહત્ત્વમાં શો ફેર થતો જાય છે ?

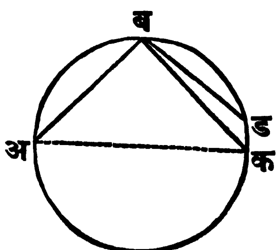
"વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં જેમ નાનો, તેમ તે વર્તુળખંડમાંનો ખુણો કાટખુણા કરતાં મોટો હોય છે."



એક વર્તુળમાં કોઈ પણ જ્યા દોરો. એ જ્યાના છેડા આગળથી કાટખુણે એક બીજી જ્યા દોરો. આ બે જ્યાઓના છેડા સાંધનારી લીટી પર કાગળને વાળો. શું માલમ પડે છે? **"જે વર્તુળખંડમાંનો (જ્યાઓ વચ્ચેનો) ખુણો કાટખુણો થયો છે, તે અર્ધવર્તુળ છે."**



એક વર્તુળમાં **અબક** કાટખુણો છે. **અબ**ના **બ** બિંદુમાંથી એક લીટી દોરી **અબ** સાથે એક સાંકડો ખુણો કરો. આ સાંકડો ખુણો જે વર્તુળખંડમાં છે તે અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો છે કે નાનો ? "મોટો." કેમ ?



એક વર્તુળમાં **અબક** કાટખુણો છે. **અબ**ના **બ** બિંદુ આગળ એક પહોળો ખુણો કરો. આ ખુણો જે વર્તુળખંડમાં છે, તે અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો છે કે મોટો ? "નાનો."

ઉપલા ત્રણ પ્રયોગો પરથી કયો નિયમ નીકળે છે?

એક **અબ** લીટી લો. તેના ઉપર ત્રિકોણમાપ જુદી જુદી સ્થિતિમાં ગોઠવો, એવી રીતે કે કાટખુણો કરનારી ત્રિકોણમાપની બાજુએ **અ** તથા **બ**ને સ્પર્શ કરે. કાટખુણાના શિરોબિંદુની જુદી જુદી સ્થિતિ આગળ ટપકું કરો. એ શિરોબિંદુની જુદી જુદી સ્થિતિ બતાવનારાં જેટલાં બને તેટલાં ટપકાં કરો. આ ટપકાંએ જોડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સીધી છે? "ના." ત્યારે તે કેવી છે? "વાંકી." આ વાંકી લીટી અને **અબ**થી થએલી આકૃતિ વર્તુળના કયા ભાગને મળતી આવે છે? "અર્ધવર્તુળને."

અ બ

બે આપેલાં બિંદુઓને જે કાટખુણાઓની બાજુએ સ્પર્શ કરે તેમનાં શિરોબિંદુથી બનતો માર્ગ શોધી કાઢવા માટે ઉપલા પ્રયોગ ઉપરથી કઈ રીત ઉપજાવી શકીએ છીએ?

ઉપલા પ્રયોગમાં શિરોબિંદુઓનો માર્ગ દર્શાવનારી લીટીમાં એક **ડ** બિંદુ લો. **અબ**ને **ક**માં દુભાગો. **કડ** સાંધો. **કડ**ને **અબ** સાથે સરખાવો. શું માલમ પડે છે? (પુ૦).

આ ઉપરથી કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુને કર્ણના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી કર્ણ સાથે કયા પ્રમાણમાં હોય છે, તે સંબંધી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

"આ લીટી કર્ણના અર્ધ બરોબર હોય છે."

એક **અબ** લીટી લો. એક ૬૦°ના ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ તેના પર બની શકે તેટલી જુદી જુદી સ્થિતિમાં ગોઠવો, એવી રીતે કે ૬૦° નો ખુણો કરનારી ત્રિકોણમાપની બાજુએ **અ**, **બ** પર પડે. એ ખુણાનાં શિરોબિંદુ જ્યાં જ્યાં પડે ત્યાં આગળ

અ બ

ટપકાંની નિશાની કરો. આ ટપકાંઓ જોડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સીધી છે? "ના." આ લીટી **अब** સાથે કેવી આકૃતિ બનાવે છે? "અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો વર્તુળખંડ."

જુદા જુદા ખુણાઓ દર્શાવનાર કાગળના કકડાઓ લો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. ઉપર દર્શાવાએલો કયો સામાન્ય નિયમ આ અને ઉપલા પ્રયોગથી સાબીત થાય છે? "......" આ પ્રયોગો નીચલો નિયમ પણ સિદ્ધ કરે છે એવું જોવામાં આવશે.

अ ब

જો એક સીધી લીટીના બે છેડામાંથી તેની એકજ બાજુ પર દોરેલી બે લીટીથી થતો ખુણો તેજ બે છેડામાંથી તેજ બાજુ પર દોરેલી બીજી બે લીટીથી બનતા ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે છેડા અને પહેલા ખુણાના શિરોબિંદુમાં થઈ જતું વર્તુળ બીજા ખુણાના શિરોબિંદુમાં થઈને પણ પસાર થશે.

૧૦. ચક્રીય* ચતુષ્કોણો.

એક વર્તુળમાં એક ગમે તેવો ચતુષ્કોણ દોરો. એના સામસામેના ખુણાઓ માપો, અને બંનેના માપનો સરવાળો કરો. સરવાળો કેટલો થયો? (૫૦). આ પરથી ચક્રીય ચતુષ્કોણોના સામસામેના ખુણાઓ સંબંધી કયો નિયમ કાઢી શકો છો?

"તેઓ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે."

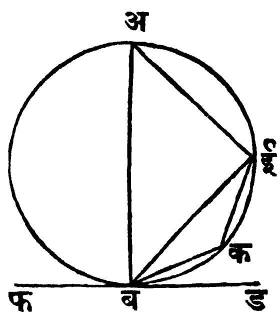
એક **अबकड** ચતુષ્કોણ એવો કાઢો કે તેનો **अ** ખુણો+ **क** ખુણો બે કાટખુણા બરોબર હોય. **अ,ब,क**માંથી જનારૂં વર્તુળ દોરો. વર્તુળ **ड**માંથી પસાર થાય છે કે નહિ? આ પરથી શું અનુમાન કરો છો?

---

* **ચક્રીય**—જેનાં સર્વ શિરોબિંદુઓ વર્તુળના પરિઘ પર પડે એવા.

"જો કોઈ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણાઓ ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તેનાં ચારે શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરી શકાશે."

૧૧. સ્પર્શલીટીના સ્પર્શબિંદુમાંથી જનારી જ્યા સાથે સ્પર્શલીટીથી થતો ખુણો.



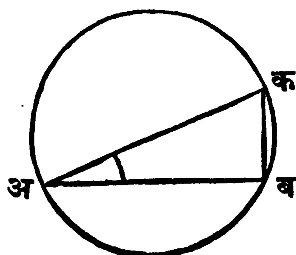
अबक વર્તુળને સ્પર્શ કરતી એક **फबड** લીટી દોરો. સ્પર્શ-બિંદુ **ब**માંથી વર્તુળને છેદનારી ગમે તે એક જ્યા **बई** દોરો. આ જ્યાથી વર્તુળના બે ખંડ પડે છે. ડાબા અને જમણા ખંડોમાં **अ** ને **क** ગમે તે બે ખુણાઓ અનુક્રમે કરો. વર્તુળને છેદનારી **बई** લીટી ડાબી તરફ સ્પર્શલીટી સાથે જે ખુણો **फबई** કરે છે, તેને જમણી તરફના ખંડમાંના **बकई** ખુણા સાથે સરખાવો; અને જમણી તરફના ખુણા **डबई**ને ડાબી તરફના વર્તુળખંડમાંના ખુણા **बअई** સાથે સરખાવો. (પુ૦). એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

"જો વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીના સ્પર્શબિંદુ-માંથી કોઈ જ્યા દોરવામાં આવે, તો સ્પર્શલીટી સાથે તે જ્યાથી થતા ખુણાઓ વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંના ખુણાઓની બરોબર હોય છે."

એક આપેલી લીટી (જ્યા) પર આપેલા ખુણાની બરો-બરના ખુણાવાળો એક વર્તુળખંડ દોરવો—

ધારો કે આપેલો ખુણો સાંકડો ખુણો છે.

ધારો કે **અબ** લીટી પર એવો વર્તુળખંડ દોર્યો છે. આપેલો ખુણો સાંકડો ખુણો છે, તેથી આ વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો હોવો જોઈએ. માટે મધ્યબિંદુ અને આખો



વ્યાસ આ વર્તુળખંડમાં હોવાં જોઈએ. અને મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી પરિધ સુધી લંબાવો. ધારો કે આ પ્રમાણે **અક** એ વ્યાસ દોરાયો. **કબ** સાંધો. હવે **અક** વ્યાસ છે, માટે **અબક** ખુણો ૯૦°નો છે.

∵ ∠**અકબ** = આપેલો ખુણો,

∴ ∠**બઅક**=આપેલા ખુણાનો કોટિખુણો.

આ પરથી જે વર્તુળની જ્યા **અબ** અને તે જ્યા વડે થતા એક વર્તુળખંડમાંનો ખુણો આપ્યાં હોય, તે વર્તુળનો વ્યાસ શોધી કાઢવા માટે કયો નિયમ નીકળે છે?

"અબ જ્યાને એક છેડે આપેલા ખુણાના કોટિખુણા જેવડો એક ખુણો કરો, અને બીજે છેડે એક લંબ દોરો. આ લીટીઓ મળવાથી જે કાટખુણ ત્રિકોણ થાય છે, તેનો કર્ણ એ માગેલા વર્તુળનો વ્યાસ છે. આ કર્ણનું મધ્યબિંદુ શોધી કાઢો. એજ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે."

હવે, જો આપેલો ખુણો સાંકડો ખુણો ન હોય તો કેમ કરવું તેનો વિચાર કરીએ.

જો આપેલો ખુણો કાટખુણો હોય, તો તો ખુલ્લુંજ છે કે **અબ**ને વ્યાસ તરીકે લઈ માગેલું વર્તુળ દોરી શકાશે.

જો આપેલો ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો આપેલા ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો (આ અલબત સાંકડો ખુણોજ હોવો જોઈએ) જે વર્તુળખંડમાં હોય એવો એક વર્તુળખંડ **અબ**ની

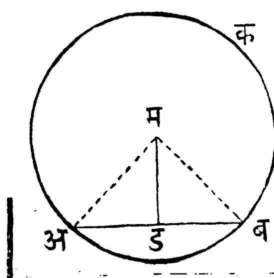
બીજી (નીચેની) બાજુએ દોરવાથી **અબ**ની સામેની (ઉપલી) બાજુએ આવેલો વર્તુળનો બાકીનો ભાગ આપેલા ખુણાવાળો વર્તુળખંડ થઈ રહેશે. માટે ઉપર બતાવેલી રીત પ્રમાણે **અબ**ની નીચલી બાજુએ એવો એક વર્તુળખંડ દોરવો.

પ્રકરણ ૨.

પ્રમેય ૩૧.

(૧) જો વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જનારી લીટી મધ્યબિંદુમાં થઈને ન જનારી જ્યાને દુભાગતી હોય, તો તે જ્યા પર લંબ હોય છે; અને

(૨) વ્યત્યાસ—જો મધ્યબિંદુમાંથી દોરેલી લીટી જ્યા પર લંબ રૂપે પડતી હોય, તો તે જ્યાને દુભાગે છે.



પક્ષ—**अबक** વર્તુળના મધ્યબિંદુ **म**ને **अब** જ્યાના મધ્યબિંદુ **ड** સાથે સાંધનારી **मड** લીટી છે.

સાધ્ય—**मड** લીટી **अब** પર લંબ છે.

રચના—**मअ** તથા **मब** સાંધો.

સિદ્ધતા—∵ **मअड** ને **मबड** ત્રિકોણોમાં,

मअ=मब. (ત્રિજ્યા)

मड સામાન્ય છે;

अड=बड. (પક્ષ)

∴ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૪)

∴ ∠**मडअ**=∠**मडब.**

∴ **मड** લીટી **अब** પર લંબ છે.

(૨) વ્યત્યાસ:—

પક્ષ—अबक વર્તુળના મધ્યબિંદુ **म**માંથી **अब** પર **मड** લંબ દોરેલો છે.

સાધ્ય—अड=बड.

રચના—मअ, मब સાંધો.

સિદ્ધતા—∵ **मअड** ને **मबड** ત્રિકોણોમાં,

मडअ ને **मडब** કાટખુણા છે, (પક્ષ)

मअ કર્ણ=**मब** કર્ણ, (ત્રિજ્યા)

मड લીટી સામાન્ય છે,

∴ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૫)

∴ **अड=बड.**

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જ્યાને દુભાગનાર લંબમાં (અથવા તેને લંબાવેલા ભાગમાં) વર્તુળનું મધ્યબિંદુ હોય છે.

૩૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળમાંની જ્યાઓને દુભાગનાર લંબો એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને તે બિંદુ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૨. વર્તુળમાંની સમાંતર જ્યાઓમાંની એકને દુભાગનાર લંબ બીજી જ્યાઓને દુભાગે છે, અને તેમના પર પણ લંબ છે.

૩. સમાંતર જ્યાઓના મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી તેમના પર લંબ છે, અને તે (જરૂર પડે લંબાવવાથી) મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૪. જે લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને ન જનારી જ્યાને દુભાગે છે, પણ તેના પર લંબ નથી, તે વર્તુળના મધ્ય-બિંદુમાં થઈને જતી નથી. (૨) જે લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુ-માં થઈને ન જનારી જ્યા પર લંબ છે, પણ તેને દુભાગતી નથી, તે વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જતી નથી. (૩) જો વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જનારી લીટી વર્તુળના મધ્ય-બિંદુમાં થઈને ન જનારી જ્યાને દુભાગતી ન હોય, તો તે જ્યા પર લંબ નથી. (૪) જો વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જનારી લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને ન જનાર જ્યા પર લંબ ન હોય, તો તે જ્યાને દુભાગશે નહિ.

૫. એમાંથી એકે જ્યા વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જતી નહિ હોય, તો તે એક બીજીને દુભાગશે નહિ.

૬. જો એક લીટી બે સમકેંદ્ર વર્તુળોને છેદતી હોય, તો તે લીટીના બંને વર્તુળો વચ્ચે પડતા ગાળાઓ બરોબર હોય છે.

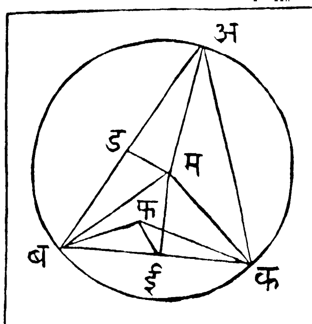
૭. બે વર્તુળોના ગમે તે એક છેદનબિંદુમાંથી તેમનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીને સમાંતર એક લીટી બંને પરિઘને અડકતાં સુધી દોરવામાં આવે, તો સાબીત કરો કે તે લીટી મધ્યબિંદુને સાંધનાર લીટી કરતાં બમણી છે.

૮. એક બહારના બિંદુ **अ**માંથી એક વર્તુળના પરિઘ સુધી **अब** અને **अक** બે સરખી લીટીઓ દોરેલી છે; તો બતાવી આપો કે **अबक** ખુણાને દુભાગનારી લીટી મધ્ય-બિંદુમાં થઈને જાય છે.

૯. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ એક વર્તુળના પરિઘ પર પડે છે; તો બતાવી આપો કે **अक**, **बड** તે વર્તુળના વ્યાસો છે.

પ્રમેય ૩૨.

એકજ સીધી લીટીમાં ન હોય એવાં ત્રણ બિંદુઓ-માં થઈને જાય એવું એકજ વર્તુળ દોરી શકાય.



પક્ષ—ત્રણ બિંદુઓ **अ,ब,क** એકજ સીધી લીટીમાં નથી.

સાધ્ય—**अ,ब,क**માં થઇને જનારૂં ફક્ત એક વર્તુળ દોરી શકાશે.

સિદ્ધતા—**बक** સાંધો. **बक**ને **ई** બિંદુમાં દુભાગો. **ई** બિંદુમાંથી **बक** પર લંબ દોરો. એ લંબમાં ગમે તે એક **म** બિંદુ લો. **बम** અને **कम** સાંધો. હવે,

∵ **बईम** અને **कईम** ત્રિકોણોમાં

बई = **कई**, (રચના)

ईम બંનેમાં સામાન્ય છે,

बईम કાટખુણો= **कईम** કાટખુણો, (રચના)

∴ **बईम** △ ≡ **कईम** △, (પ્ર૦ ૧૦)

∴ **बम=कम**.

એટલે કે **ईम**માંનું કોઇ પણ બિંદુ **ब** અને **क**થી સરખે અંતરે છે. હવે આપણે એમ સિદ્ધ કરીએ કે **ईम**ની બહારનું કોઇ પણ બિંદુ **ब** અને **क**થી સરખે અંતરે હોઇ શકે નહિ. ઉદાહરણ તરીકે, બની શકતું હોય તો **फ** બિંદુ **ब** અને **क**થી સરખે અંતરે છે એમ ધારી લો.

फब, फक, અને **फई** સાંધો. હવે,

∵ **बईफ** અને **कईफ** ત્રિકોણોમાં,

बई = कई,

ईफ બંનેમાં સામાન્ય છે,

बफ = कफ,

∴ बईफ △ ≡ कईफ △, (પ્ર૦ ૧૦)

∴ ∠ बईफ = ∠ कईफ

પણ આ અશક્ય છે; માટે बकને દુભાગનાર લંબની બહારનું કોઈપણ બિંદુ ब અને कથી સરખે અંતરે હોઈ શકે નહિ; અર્થાત્ ब અને कથી સરખે અંતરે જેટલાં બિંદુઓ હોઈ શકે તે સઘળાં ईम લંબની અંદરજ હોવાં જોઈએ. એજ પ્રમાણે अ અને बથી સરખે અંતરે જેટલાં બિંદુઓ હોઈ શકે તે (अब લીટીના ड બિંદુમાંથી પસાર થનાર) अबને દુભાગનાર લંબમાંજ હોવાં જોઈએ. ધારો કે આ લંબો म બિંદુમાં મળે છે. ત્યારે તો अ, ब, क એ ત્રણે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું તો ફક્ત એક म બિંદુજ છે.

હવે मअ = मब; અને मब = मक; માટે म મધ્યબિંદુ લઈને मअ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ अ, ब, क:બિંદુઓમાં થઈને પસાર થશે, અને એવું વર્તુળ ફક્ત એકજ દોરી શકાશે.

૩૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક વર્તુળ બીજાને બે કરતાં વધારે બિંદુમાં છેદી શકે નહિ.

૨. વર્તુળના પરિઘ ઉપરનાં બે કરતાં વધારે બિંદુઓથી સરખે અંતરે રહેનાર બિંદુ તે વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૩. अबकड ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને म બિંદુમાં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે अबम, बकम, कडम, डअम ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બનાવે છે.

૪. अबक ત્રિકોણમાં प બિંદુ એવું છે કે તેથી पकअ ખુણો पअब ખુણાની બરોબર અને पअब ખુણો पबक

ખુણાની બરોબર થાય છે; તો સિદ્ધ કરો કે **पकअ, पअब, पबक** ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ જે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે, તે ત્રિકોણ અને **अबक** ત્રિકોણ પરસ્પર સમકોણ છે.

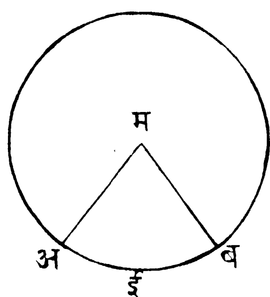
૫. જો એક સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિની બાજુઓને દુભાગનાર લંબો એક બિંદુમાં મળતા હોય, તો તે આકૃતિ ચક્રીય છે.

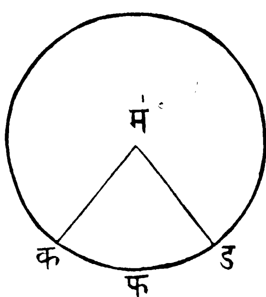
પ્રમેય ૩૩.

સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં)

(૧) બે કાંસોની સામેના મધ્યકોણો સરખા હોય, તો તે કાંસો સરખા હોય છે; અને

(૨) જો બે કાંસો સરખા હોય, તો તેમની સામેના મધ્યકોણો સરખા હોય છે.





પક્ષ—જેનાં **म** અને **मं** અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે, એવાં બે સરખાં વર્તુળોના **अब** અને **कड** કાંસો છે, અને **अमब** ખુણો **कमंड** ખુણા બરોબર છે.

સાધ્ય—अब કાંસ = **कड** કાંસ.

સિદ્ધતા—अब વર્તુળને **कड** વર્તુળ પર એવી રીતે મૂકો,

કે **म** બિંદુ **मं** પર પડે, અને **मअ** લીટી **मक**ની દિશામાં પડે. હવે

∵ **मअ = मंक**, (સરખાં વર્તુળોની ત્રિજ્યા)

∴ **अ** બિંદુ **क** બિંદુ પર પડે છે.

∵ ∠ **अमब** = ∠ **कमंड**, (પક્ષ)

∴ **मब** લીટી **मड**ની દિશામાં પડે છે.

∵ ત્રિજ્યાઓ (**मब, मड**) સરખી છે,

∴ **ब** બિંદુ **ड** ઉપર પડે છે.

∵ **अ, ब** બિંદુઓ **क, ड** ઉપર પડે છે, અને વર્તુળો સરખાં છે, તેટલા માટે એક પરિઘ બીજા પર પડી રહે છે.

∴ **अब** કાંસ **कड** કાંસ પર પડે છે.

∴ **अब** કાંસ = **कड** કાંસ.

૨. (વ્યત્યાસ).

પક્ષ—अब કાંસ = **कड** કાંસ.

સાધ્ય—∠ अमब = ∠ कमंड.

સિદ્ધતા—अब વર્તુળને ઉંચકીને **कड** ઉપર એવી રીતે મૂકવામાં આવે કે **म** બિંદુ **मं** પર પડે અને **मअ** લીટી **मंक**ની દિશામાં પડે, તો

∴ **मअ = मंक**, (પક્ષ)

∴ **अ** બિંદુ **क** પર પડે છે;

અને વર્તુળો સમાન છે માટે તેના પરિઘ મળે છે; અને

∵ **अब** કાંસ = **कड** કાંસ, (પક્ષ).

∴ **ब** બિંદુ **ड** પર પડે છે, એટલે **मब** ને **मंड** લીટીઓ મળે છે.

∴ ∠ **अमब** = ∠ **कमंड**.

૩૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. જો સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) બે કાંસોની સામેના મધ્યકોણો વિષમ હોય, તો મોટા મધ્યકોણની સામેનો કાંસ નાના મધ્યકોણની સામેના કાંસ કરતાં મોટો હોય છે.

૨. જો સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) એક કાંસની સામેનો મધ્યકોણ બીજા કાંસની સામેના મધ્ય-કોણથી અમુકગણો હોય, તો પહેલો કાંસ બીજા કાંસથી તેટલાજગણો હોય છે. (અર્થાત્ કાંસો પોતાની સામેના મધ્યકોણોના પ્રમાણમાંજ હોય છે).

૩. એક વર્તુળના પરિઘ ઉપરના **अ** બિંદુમાંથી **अब** ને **अक** બે સરખી જ્યાઓ દોરેલી છે; તો બતાવી આપો કે **अ** બિંદુ આગળ **बअक** કાંસ દુભાગાય છે.

૪. **अ** બિંદુ **बअक** કાંસનું મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે એ બિંદુ **ब** અને **क**માંથી પસાર થનારી ત્રિજ્યા-ઓથી સરખે અંતરે છે.

૫. **अब** એક વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને તેને સમાંતર એક **कड** જ્યા દોરેલી છે. એ **क**માંથી બીજો વ્યાસ દોર-વામાં આવે, તો સિદ્ધ કરો કે **ब** બિંદુ **डबई** કાંસનું મધ્યબિંદુ છે.

૬. એક વર્તુળના **डफ** વ્યાસને અને તેની એક જ્યા **ईग** ને લંબાવતાં તે બંને **अ**માં મળે છે. હવે જો **गअ** = $\frac{1}{2}$ **डफ** હોય, તો સાબીત કરો કે **फग** કાંસ = $\frac{1}{3}$ **डई** કાંસ.

૭. **पच** જ્યા અને **पर** વ્યાસ પરિઘ પરના **प** બિંદુમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **पच**ને સમાંતર દોરેલી ત્રિજ્યા **चर** કાંસને દુભાગે છે.

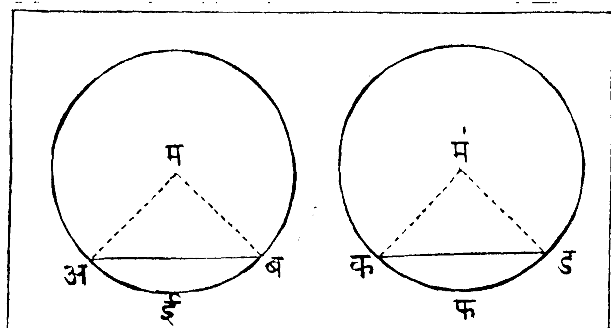
૮. **मअ** અને **पब** ત્રિજ્યાઓથી સરખે અંતરે પરિઘ પર એક **प** બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **अप** કાંસ =**कप** કાંસ.

પ્રમેય ૩૪.

સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં)—

(૧) જો બે કાંસો સરખા હોય, તો તેમની જ્યાઓ સરખી હોય છે.

(૨) જો બે જ્યાઓ સરખી હોય, તો તેમણે કાપી કાઢેલા કાંસો સરખા હોય છે.



પક્ષ—म અને मं એ સરખાં વર્તુળોનાં અનુક્રમે મધ્ય-બિંદુઓ છે, અને अब, कड કાંસો સરખા છે.

સાધ્ય—अब જ્યા = कड જ્યા.

રચના—अम, मब, मंक, मंड સાંધો.

સિદ્ધતા—∵ अब કાંસ = कड કાંસ,

∴ ∠अमब=∠कमंड. (પ્ર૦ ૩૩)

હવે ∵ अमब અને कमंड ત્રિકોણોમાં—

मअ=मंक, (સરખાં વર્તુળોની ત્રિજ્યા)

मब=मंड, („)

અને ∠अमब=∠कमंड;

∴ अब=कड (પ્ર૦ ૧૦)

(૨) પક્ષ—अब જ્યા = कड જ્યા.

સાધ્ય—**अब** કૌંસ = **कड** કૌંસ.

સિદ્ધતા—∵ **अमब** અને **कमंड** ત્રિકોણોમાં—

मअ=मंक;

मब=मंड;

अब=कड; (પક્ષ)

∴ ∠**अमब**=∠**कमंड** (પ્ર૦ ૧૪)

∴ **अब** કૌંસ = **कड** કૌંસ. (પ્ર૦ ૩૩)

વ્યાખ્યા—બે ત્રિજ્યા અને તેમની વચમાં આવેલા કૌંસ વડે જે આકૃતિ થાય છે તેને '**વર્તુળવિભાગ**' કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) સરખા કૌંસો અથવા સરખી જ્યાઓ વડે બનેલા વર્તુળવિભાગો અને વર્તુળખંડો સરખા હોય છે.

૩૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. જો વર્તુળની અંદર કાઢેલા ચતુષ્કોણની બે સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો તે ચતુષ્કોણના કર્ણો સરખા હોય છે.

૨. એક વર્તુળના **अब** કૌંસને **क**માં દુભાગ્યો છે; તો બતાવી આપો કે **अब** જ્યા **अक**ના બમણા કરતાં ઓછી છે.

૩. એક વર્તુળના **अब** કૌંસને **क**માં દુભાગો, **अब** જ્યાના અર્ધ બરોબર **अड** જ્યા કાઢો, અને બતાવી આપો કે **अड** કૌંસ **अक** કૌંસ કરતાં નાનો છે.

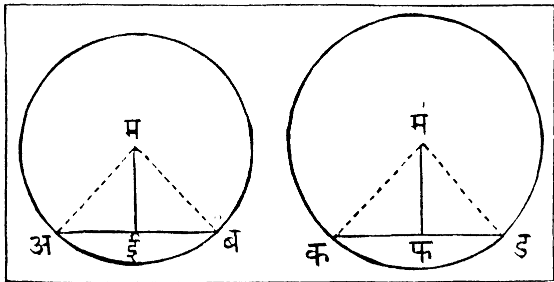
૪. વર્તુળનો પરિઘ વ્યાસના ત્રણગણા કરતાં મોટો હોય છે, એ સત્ય વર્તુળમાં એક બીજા સાથે ૬૦° નો ખુણો કરનારી ત્રિજ્યાઓ એક પછી એક દોરીને સાબીત કરો.

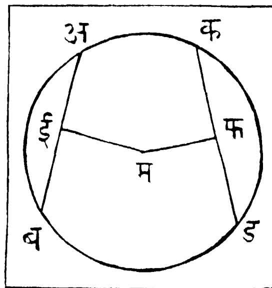
પ્રમેય ૩૫.

સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં)—

(૧) સરખી જ્યાઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે;

(૨) મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યાઓ સરખી હોય છે.





પક્ષ—એ સરખાં વર્તુળો **अब** અને **कड**નાં **म** અને **मं** મધ્યબિંદુઓ છે. (આકૃતિ ૧ અને ૨ જુઓ). **अब** અને **कड** જ્યાઓ સરખી છે. **मई** ને **मंफ** અનુક્રમે **अब** અને **कड** ઉપર લંબ છે.

સાધ્ય—**मई = मंफ**

સિદ્ધતા—∵ **मई** લીટી **अब** પર લંબ છે,

∴ **अई** = $\frac{1}{2}$**अब.** (પ્ર૦ ૩૧)

એજ પ્રમાણે **कफ** = $\frac{1}{2}$ **कड.** (પ્ર૦ ૩૧)

પરંતુ **अब=कड**,

∴ **अई=कफ**.

હવે, **अमई** અને **कमंफ** એ કાટખુણુ ત્રિકોણોમાં—

अम કર્ણ = **कमं** કર્ણ; અને

अई બાજુ = **कफ** બાજુ;

∴ △ **अमई** ≡ △ **कमंफ** (પ્ર૦ ૧૫).

∴ **मई** = **मंफ**.

(૨) વ્યત્યાસ—

પક્ષ—मई લંબ = **मंफ** લંબ.

સાધ્ય—अब=कड.

સિદ્ધતા—∵ अमई અને **कमंफ** કાટખુણુ ત્રિકોણોમાં-

अम કર્ણ = **कमं** કર્ણ;

मई બાજુ = **मंफ** બાજુ;

∴ △ **अमई** ≡ △ **कमंफ** (પ્ર૦ ૧૫)

∴ **अई=कफ**.

પરંતુ ૨ **अई=अब**, અને ૨ **कफ=कड**; (પ્ર૦ ૩૧)

∴ **अब=कड**.

૩૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એકજ વર્તુળમાં બે સરખી અને સમાંતર જ્યાઓને તે વર્તુળનો કોઈ પણ વ્યાસ જે બિંદુઓમાં છેદતો હોય, તે બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે.

૨. બે સમકેંદ્ર વર્તુળોમાંના બહારના વર્તુળમાં બે સરખી જ્યાઓ છે. જો આ જ્યાઓ અંદરના વર્તુળને છેદતી હોય, તો બતાવી આપો કે આ જ્યાઓના નાના વર્તુળમાં આવેલા ભાગો સરખા છે.

૩. વ્યાસના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી

પસાર થનારી અને વ્યાસ સાથે સરખા ખુણા કરનારી જ્યાઓ સરખી હોય છે.

૪. ઉપલા પ્રશ્નનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૫. બે સરખાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીને સમાંતર હોય એવી બેઉ વર્તુળોને છેદનારી એક લીટી દોરવામાં આવે, તો વર્તુળોમાં પડતા તે લીટીના ભાગો સરખા હોય છે.

૬. જો બે સરખાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીના મધ્યબિંદુમાં થઈને જનારી એક લીટી દોરવામાં આવે, તો વર્તુળોમાં પડતા તે લીટીના ભાગો સરખા હોય છે.

૭. જો એક વર્તુળની બે સરખી જ્યાઓના મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીને બંને તરફ પરિધિ સુધી લંબાવવામાં આવે, તો જ્યાઓ અને પરિધિ વચ્ચેના તે લીટીના ભાગો સરખા હોય છે.

૮. વર્તુળમાં એક જ્યા આપેલી છે, અને તેના કોઈ પણ વ્યાસના બે છેડાઓમાંથી તેના પર લંબો પાડેલા છે; તો બતાવી આપો કે જો વ્યાસ જ્યાને છેદતો હોય તો લંબોની બાદબાકી, અને જો વ્યાસ જ્યાને ન છેદતો હોય તો લંબોનો સરવાળો નિત્ય છે. (નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧, પરચુરણ પ્રશ્નો ૬૨, ૬૩ જુઓ).

૯. વર્તુળના પરિધના અંતર્વક્ર ભાગ સુધી કોઈ બહારના બિંદુમાંથી દોરેલી બે લીટીઓ સરખી હોય, તો તે લીટીઓના બહિર્વક્ર પરિધ પર્યંતના ભાગો સરખા હોય છે.

૧૦. એક આપેલા વર્તુળમાં—

(૧) એક આપેલી જ્યા બરોબરની સમાંતર જ્યા દોરો;

(૨) એક આપેલી જ્યા બરોબરની અને તેના પર લંબરૂપે પડનારી જ્યા દોરો;

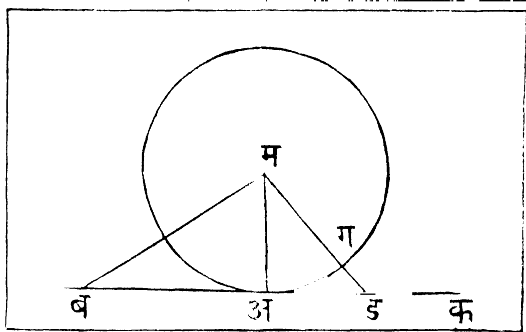
(૩) એક આપેલી જ્યા બરોબરની અને એક આપેલી લીટીને સમાંતર જ્યા દોરો.

૧૧. મધ્યબિંદુથી વત્તેઓછે અંતરે આવેલી જ્યાઓમાંથી જે મધ્યબિંદુની વધારે નજદીક હોય છે, તે દૂરની કરતાં મોટી હોય છે.

૧૨. વર્તુળમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પસાર થતી સઘળી જ્યાઓમાં, તે બિંદુમાંથી પસાર થતા વ્યાસ પર લંબ હોનારી જ્યા નાનામાં નાની હોય છે.

પ્રમેય ૩૬.

સ્પર્શલીટીના સ્પર્શબિંદુમાંથી જનારી ત્રિજ્યા સ્પર્શલીટી પર લંબ હોય છે.



પક્ષ—**बअक** સ્પર્શલીટી છે; **अ** સ્પર્શબિંદુ છે; અને **अम** સ્પર્શબિંદુમાંથી જનારી ત્રિજ્યા છે.

સાધ્ય—**अम** ત્રિજ્યા **बअ** પર લંબ છે.

સિદ્ધતા—જો **अम** લીટી **बअ** પર લંબ ન હોય, તો **म** માંથી **बक** ઉપર **मड** લંબ દોરો.

સ્પર્શબિંદુ સિવાયનાં સ્પર્શલીટીનાં સઘળાં બિંદુઓ પરિધની બહાર હોય છે, (વ્યાખ્યા)

∴ **ड** બિંદુ પરિધની બહાર છે, માટે **मड** લીટી પરિધને છેદીને જશે. ધારો કે તે પરિધને **ग**માં છેદે છે. હવે,

∵ **मड** લંબ છે અને **मअ** તિર્યક્ છે (લંબ નથી),

∴ **મઅ** > **મડ**. (પ્ર૦ ૨૧)

પરંતુ **મઅ** = **મગ**, (ત્રિજ્યા)

∴ **મગ** > **મડ**.

આ અશક્ય છે. માટે **અક**ને મળવાને **મ**માંથી દોરેલી **મઅ** સિવાયની કોઈ પણ લીટી લંબ હોઈ શકે નહિ.

માટે **મઅ** લીટી **બઅ** પર લંબ છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧. પરિઘ ઉપરના કોઈ પણ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી એકજ સ્પર્શલીટી દોરી શકાય.

(ધારો કે **અ** બિંદુ આગળ બે જુદી જુદી સ્પર્શલીટીઓ દોરેલી છે. પ્રમેય ૩૯ પ્રમાણે આ બંને સ્પર્શલીટીઓ **મઅ** ત્રિજ્યા પર એકજ બાજુએ લંબ થાય; પણ તે અશક્ય છે, માટે એવી બે સ્પર્શલીટીઓ દોરી શકાય નહિ).

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સ્પર્શલીટી પર સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ વર્તુળના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—વર્તુળના મધ્યબિંદુમાંથી સ્પર્શલીટી પર દોરેલો લંબ સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

૩૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળના વ્યાસના છેડાઓમાંથી જતી સ્પર્શલીટીને સમાંતર જેટલી જ્યાઓ દોરવામાં આવે તે સઘળીને વ્યાસ લંબરૂપે દુભાગે છે.

૨. બે સમકેંદ્ર વર્તુળોમાંથી અંદરના વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બહારના વર્તુળની સઘળી જ્યાઓ સરખી હોય છે, અને સ્પર્શબિંદુમાં દુભાગાય છે.

૩. **પર** વ્યાસ છે, અને **પચ** જ્યા છે; **રપચ** ખુણાને **પસ** દુભાગે છે, અને **પસ** વર્તુળને **સ**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **સ** બિંદુ આગળની સ્પર્શલીટી પર **પચ** લંબ છે.

૪. વ્યાસના છેડાઓમાંથી જતી સ્પર્શલીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૫. સમાંતર સ્પર્શલીટીઓનાં સ્પર્શબિંદુઓને સાંધનારી લીટી વ્યાસ છે.

૬. બે સમકેન્દ્ર વર્તુળ એવી રીતે કાઢો, કે અંદરના વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બહારના વર્તુળની જ્યા અંદરના વર્તુળના વ્યાસ બરોબર થાય.

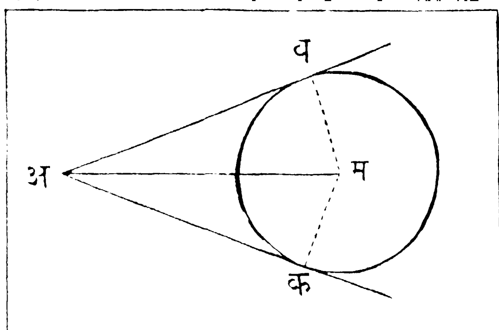
પ્રમેય ૩૭.

જો કોઈ બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બે લીટીઓ દોરવામાં આવે, તો

(૧) તેઓ સરખી હોય છે;

(૨) તેમની સામેના વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળના ખુણાઓ સરખા હોય છે;

(૩) આપેલા બિંદુને વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી સાથે તેઓ સરખા ખુણા કરે છે.



પક્ષ—**म** વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને એક બહારના બિંદુ **अ**માંથી **अब** અને **अक** બે સ્પર્શલીટીઓ દોરેલી છે.

સાધ્ય—(૧) **अब = अक;**

(૨) **∠अमब=∠अमक;**

(૩) **∠बअम=∠कअम.**

સિદ્ધતા—∵ **ब** અને **क** આગળ **अब, अक** સ્પર્શ કરે છે,

∴ अबम ને अकम બંને કાટખુણા છે. (પ્ર૦ ૩૬)

હવે ∵ अबम ને अकम બે કાટખુણ ત્રિકોણોમાં–

मब બાજુ=मक બાજુ; (ત્રિજ્યા)

अम કર્ણ બંનેમાં સામાન્ય છે;

∴ એ બંને ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૫)

∴ अब=अक;

∠अमब=∠अमक;

અને ∠बअम=∠कअम.

૩૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. म એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને વર્તુળ બહારના એક अ બિંદુમાંથી દોરેલી अब ને अक લીટીઓ તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે ∠बअक + ∠बमक=બે કાટખુણા.

૨. બે વર્તુળોની સામસામી બાજુએ આવેલી સામાન્ય* સ્પર્શલીટીઓ સરખી હોય છે.

૩. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા કોઈ પણ ચતુષ્કોણની સામસામેની બે બાજુઓની જોડનો સરવાળો બીજી બે બાજુઓના સરવાળા બરોબર હોય છે.

૪. ઉપલા પ્રશ્નનો વ્યત્યાસ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૫. જો કોઈ વર્તુળની આસપાસ એકી સંખ્યાવાળી બાજુઓની સીધી લીટીની આકૃતિ દોરવામાં આવે, તો એક છોડીને બીજી એમ લીધેલી લીટીઓનો સરવાળો બાકીની લીટીઓના સરવાળા બરોબર હોય છે.

૬. બે સમાંતર સ્પર્શલીટીઓ એક ત્રીજી સ્પર્શલીટીને प અને च બિંદુઓમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે पच મધ્યબિંદુ સાથે કાટખુણો કરે છે.

---

* બે વર્તુળોની સામાન્ય સ્પર્શલીટીની લંબાઈ એટલે બે સ્પર્શબિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર.

૭. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને મધ્યબિંદુ આગળ છેદે છે.

૮. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા સમબાજુ ચતુષ્કોણની (ર્‌હૉમ્બસની) સામસામેની બાજુઓના સ્પર્શબિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૯. જો વર્તુળની આસપાસ એક કાટખુણુ ચોખુણુ દોરવામાં આવે, તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૦. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ મધ્યબિંદુ સાથે જે ખુણાઓ કરે છે, તે ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૧૧. કોઈ પણ જ્યા પોતાના છેડાઓમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૧૨. જો બે વર્તુળો એક બીજાને છેદતાં હોય, તો છેદનબિંદુઓ આગળ વર્તુળોની સ્પર્શલીટીઓથી થતા ખુણાઓ સરખા હોય છે.

૧૩. આપેલી જ્યાના છેડાઓમાંથી દોરેલી બંને સ્પર્શલીટીઓ તે જ્યાની બરોબર હોય, તો સ્પર્શલીટીઓ વચ્ચેનો ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ, અને તે જ્યા વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જે ખુણો કરે તે કેવડો હોવો જોઈએ?

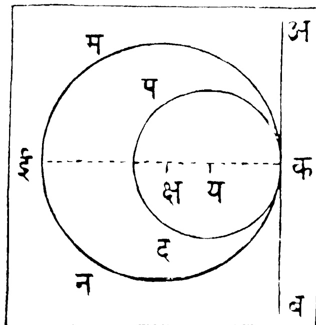
૧૪. એક વર્તુળની બહારના બિંદુ **प** માંથી **पच**, **पर** બે સ્પર્શલીટીઓ દોરેલી છે, અને **चस** વ્યાસ છે; તો બતાવી આપો કે **चपर** ખુણો **रचस**થી બમણો છે.

૧૫. વર્તુળની આસપાસ દોરેલી બહુકોણુ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ તે આકૃતિની પરિમિતિના ને વર્તુળની ત્રિજ્યાના ગુણાકારનું અર્ધ હોય છે.

૧૬. બે સમકેંદ્ર વર્તુળોમાંના બહારનામાં દોરેલી **पर** ને **पच** જ્યાઓ અંદરના વર્તુળને **स** અને **ट**માં સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે **सट** $= \frac{1}{2}$**चर**.

પ્રમેય ૩૮.

જો બે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરતાં હોય, તો સ્પર્શબિંદુ તેમનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટી પર હોય છે.



પ્રકાર ૧.—

પક્ષ—कमन અને **कपद** વર્તુળો એક બીજાને અંદરથી **क** બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે છે, અને **क्ष** તથા **य** તેમનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

સાધ્ય—क्षय લીટીને લંબાવતાં તે **क**માંથી પસાર થાય છે.

સિદ્ધતા—(ધારો કે **क** બિંદુમાંથી જનારી બંને વર્તુળોની સામાન્ય સ્પર્શલીટી **अब** છે. **क्षक, यक** સાંધો).

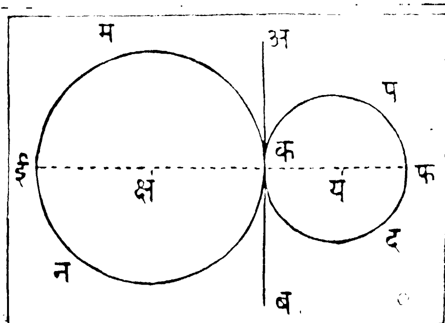
∵ **अक** સ્પર્શલીટી છે અને **क्षक** ત્રિજ્યા છે,

∴ **अकक्ष** ખુણો કાટખુણો છે.

એજ કારણથી **अकय** પણ કાટખુણો છે.

∵ **कक्ष** અને **कय, अक** સાથે તેની એકજ બાજુએ કાટખુણા કરે છે,

∴ **कयक्ष** એકજ લીટી છે; એટલે કે **क्षय** લીટી **क** બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.



પ્રકાર ૨.—

પક્ષ—कमन ને **कपद** વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને **क्ष**, **य** તેનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

સાધ્ય—क्ष ને **य** બિંદુઓને જોડનારી લીટી **क**માંથી જાય છે.

સિદ્ધતા—(પહેલા પ્રકારમાં કરી હતી તેવી રચના કરીને)

∵ ∠**अकक्ष**= ૧ કાટખુણો; અને

∠**अकय**= ૧ કાટખુણો.

∴ ∠**अकक्ष** + ∠**अकय**= ૨ કાટખુણા.

∴ **क्षकय** એકજ સીધી લીટી છે. (પ્ર૦ ૨)

સૂચના—अकब સ્પર્શલીટીમાંના **क** સ્પર્શબિંદુમાંથી એક લંબ દોરીને તથા ૩૬મા પ્રમેયનો બીજો ઉપસિદ્ધાંત લાગુ પાડીને આ પ્રમેય બીજી રીતે સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—જો બે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરતાં હોય, તો તેમનાં મધ્યબિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓના સરવાળા બરોબર હોય છે; અને જો તેઓ એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરતાં હોય, તો તેમનાં મધ્યબિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓની બાદબાકી બરોબર હોય છે.

૩૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. બે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરે છે. જો સ્પર્શબિંદુમાંથી એક લીટી બંને વર્તુળોને છેદે એમ દોરીએ, તો છેદનબિંદુઓમાંથી દોરેલી ત્રિજ્યાઓ સમાંતર હોય છે.

૨. જો બે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે, તો તેમના સમાંતર વ્યાસોના વ્યુત્ક્રમ છેડાઓ (છેડાના બિંદુઓ) અને સ્પર્શબિંદુ એક સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. બે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરે છે, અને સ્પર્શબિંદુમાંથી બંને વર્તુળોને છેદનારી એક લીટી વર્તુળોના પરિધ સુધી દોરવામાં આવી છે; તો આ લીટીના છેડાઓ આગળ દોરેલી વર્તુળની સ્પર્શલીટીઓ સમાંતર છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને સ્પર્શબિંદુમાંથી એક લીટી પરિધોને મળતાં સુધી દોરવામાં આવી છે; તો સિદ્ધ કરો કે બંને વર્તુળોનાં સ્પર્શબિંદુ આગળ આ લીટી દુભાગાય છે.

૫. બે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને ત્રીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરે છે. જો આ વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીઓથી ત્રિકોણ થતો હોય તો બતાવી આપો કે એ ત્રિકોણની પરિમિતિ ત્રીજા વર્તુળના વ્યાસની બરોબર છે.

૬. બે વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે **ન** ને **મ** છે; તેઓ એક બીજાને બહારથી **અ** આગળ સ્પર્શ કરે છે, અને એક સાધારણ સ્પર્શલીટી તેમને **બ** અને **ક** બિંદુઓમાં સ્પર્શ કરે છે. **બનડ** ને **કમઈ** વ્યાસો છે; તો બતાવી આપો કે **બઈ** ને **કડ** એક બીજીને **અ** બિંદુમાં છેદે છે.

૭. બે વર્તુળો એક બીજાને અંદરથી અથવા બહારથી સ્પર્શ કરે છે. આ બંને વર્તુળોને સ્પર્શ કરનારી લીટીઓ એક

બીજીને સમાન્તર દોરવામાં આવી છે. જો આ સ્પર્શલીટીઓનાં સ્પર્શબિંદુઓને અને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુને જોડવામાં આવે, તો બતાવી આપો કે આ બિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ એક સીધી લીટી બનાવે છે, અથવા તો એક બીજીને કાટખુણે છે.

૮. **म** અને **न** બે સરખાં વર્તુળો, જે એક બીજાને બહારથી **र** બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે છે, તેનાં મધ્યબિંદુઓ છે. પ્રત્યેક વર્તુળમાં એક બીજી સાથે કાટખુણો કરનારી **रस** અને **रट** એમ એક એક જ્યા દોરવામાં આવી છે. સાબીત કરો કે **सट** લીટી **मन**ની બરોબર અને તેને સમાંતર છે.

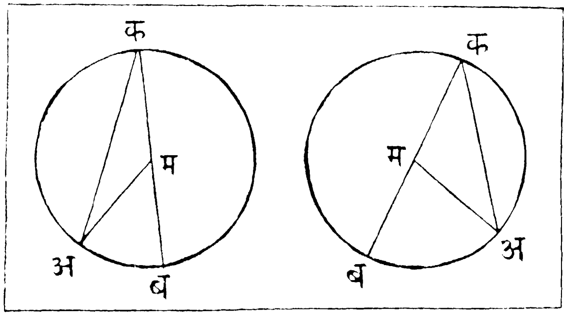
૯. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને **अ** અને **ब**માં છેદે છે. **म** મધ્યબિંદુવાળું એક ત્રીજું વર્તુળ આ બંને વર્તુળોને બહારથી સ્પર્શ કરે છે. સાબીત કરો કે **अ**, **ब**, **म** સીધી લીટીમાં છે.

૧૦. ત્રણ વર્તુળો એક બીજાને **अ**, **ब**, **क** આગળ બહારથી સ્પર્શ કરે છે. ત્રીજા વર્તુળને અનુક્રમે **म** અને **न**માં ફરીથી છેદે એમ **अब** ને **अक**ને લંબાવવામાં આવે છે. સિદ્ધ કરો કે **मन** બીજાં બે વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીને સમાંતર છે.

૧૧. જુદા જુદા વ્યાસના ચાર વર્તુળાકાર સિક્કાઓ મેજ પર મૂકેલા છે, અને તે સિક્કાઓમાંથી દરેક બીજા બેને સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે સિક્કાઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી થતા ચતુષ્કોણમાં વર્તુળ દોરી શકાશે.

પ્રમેય ૩૯.

કોઈ પણ કૌંસ પરનો મધ્યકોણ તેજ કૌંસ પરના ગમે તે પરિધિકોણ કરતાં બમણો હોય છે.



પક્ષ—**म** મધ્યબિંદુવાળા વર્તુળનો **अब** કૌંસ છે. **अब** પર **अमब** ખુણો મધ્યકોણ છે; અને બાકી રહેલા પરિધિના ભાગ પરના કોઈ પણ **क** બિંદુ આગળ **अकब** પરિધિકોણ છે.

સાધ્ય—∠**अमब**=૨∠**अकब**.

જ્યારે કૌંસ સામેનો મધ્યકોણ બહિર્વક્ર ન હોય, ત્યારે મધ્યબિંદુ **म** (૧) કૌંસ સામેના પરિધિકોણના **कअ** કે **कब** ભુજમાં, અથવા (૨) આ ખુણાના બે ભુજોની વચમાં, અથવા (૩) આ ખુણાના ભુજોની બહાર હોઈ શકે. આ પ્રમાણે આ પ્રમેયના ત્રણ પ્રકાર પડશે.

પ્રકાર ૧—(ધારો કે **म** બિંદુ એક **कब** ભુજમાં છે).

∵ **मक=मअ**; (ત્રિજ્યા)

∴ ∠**मअक**=∠**मकअ**; (પ્ર૦ ૧૨)

∴ ∠**मअक**+∠**मकअ**=૨ ∠**मकअ**.

પરંતુ ∠**मअक**+∠**मकअ**=બહારનો ખુણો **अमब**; (પ્ર૯ ૮. ઉ૦ ૨)

∴ ∠**अमब**=૨ ∠**मकअ**.

=૨ ∠**अकब**.

પ્રકાર ૨—(ધારો કે **म** એ **कअ** ને **कब**ની વચ્ચે છે). **क**, **म** સાંધો, અને **कम**ને પરિધને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તે પરિધને **ड**માં મળે છે. પહેલા પ્રકારમાં બતાવ્યા પ્રમાણે—

∵ ∠अमड = २ ∠अकम;

તેમજ ∠बमड = २ ∠बकम;

∴ ∠अमड + ∠बमड = २ (∠अकम + ∠बकम);

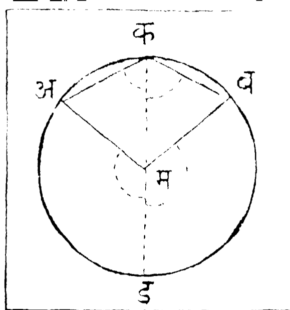
એટલે ∠अमब = २ ∠अकब.

પ્રકાર ૩—(ધારો કે **म** બિંદુ **कअ** ને **कब**ની બહાર છે). પહેલા પ્રકારમાં બતાવ્યા પ્રમાણે,

∵ ∠अमड = २ ∠अकम;

∠बमड = २ ∠बकम;

$\therefore$ ($\angle$ बमड-$\angle$ अमड)=२ ($\angle$ बकम-$\angle$ अकम);
એટલે $\angle$ अमब= २ $\angle$ अकब.



[જ્યારે મધ્યકોણુ બહિર્વક્ર હોય (જુઓ ઉપલી આકૃતિ), ત્યારે બીજા પ્રકાર જેવીજ સિદ્ધતા થશે].

ઉપસિદ્ધાંત—એકજ અથવા સરખા કોંસ પરના સઘળા પરિધિકોણો સરખા હોય છે.

૩૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) જે કોંસ પરના પરિધિકોણો સરખા હોય તે કોંસો સરખા હોય છે.

૨. એકજ વર્તુળમાં સમાંતર જ્યાઓ વચ્ચેના કોંસો સરખા હોય છે.

૩. એક વર્તુળમાં **अब, डक** જ્યાઓ સરખી છે; તો સાબીત કરો કે **अबकड** ચતુષ્કોણુની **अड** બાજુ **बक**ને સમાંતર છે.

૪. એક વર્તુળમાં **अब, डक** જ્યાઓ સરખી છે; તો બતાવી આપો કે **अक=बड**.

૫. કોઈ પણ વર્તુળમાં એક બીજીને છેદનારી બે જ્યાઓ વચ્ચેનો ખુણો તે બે જ્યાઓની વચ્ચે આવેલા કોંસોની સામેના પરિધિકોણોના સરવાળા બરોબર હોય છે.

૬. **म** એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને તેની **अब**, **कड** જ્યાઓ એક બીજીને **ई**માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે ∠**अमक** + ∠**बमड** = २ ∠**अईक**.

૭. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને **अ**, **ब**માં છેદે છે. **अ**માંથી બંને વર્તુળોને અનુક્રમે **क** અને **ड**માં છેદનારી એક લીટી દોરવામાં આવી છે; તો બતાવો કે **बक**=**बड**.

૮. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને **अ**,**ब**માં છેદે છે. **अ**માંથી **कअड** અને **ईअफ** ગમે તે બે લીટીઓ વર્તુળના પરિઘો સુધી દોરેલી છે; તો બતાવી આપો કે **कई**=**डफ**.

૯. **अबक** ત્રિકોણમાં કાઢેલું વર્તુળ ત્રિકોણની **अब** બાજુને **ड**માં, **बक**ને **ई**માં, અને **कअ**ને **फ**માં સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **डफई** ત્રિકોણનો કોઈ પણ ખુણો અને તે ખુણાની સામેના **अबक** ત્રિકોણના ખુણાનું અર્ધ મળીને એક કાટખુણા બરાબર થાય છે.

૧૦. **अबक** ત્રિકોણની આસપાસ એક વર્તુળ દોરેલું છે, અને **अड** લીટી **अ** ખુણાને દુભાગે છે અને વર્તુળને **ड** બિંદુમાં મળે છે. **ड**માંથી **अब** અને **अक** ઉપર અનુક્રમે **डई** ને **डफ** લંબો દોરવામાં આવેલા છે; તો સાબીત કરો કે **अई** = $\frac{1}{2}$ (**अब**+**अक**).

૧૧. **अबकड** એક ચોરસ છે. **ब** અને **क** મધ્યબિંદુઓ લઈને **बक** ત્રિજ્યાએ વર્તુળો દોર્યાં છે, જે એક બીજાને **ई**માં છેદે છે; તો ∠**बडई** = $\frac{1}{6}$ કાટખુણો.

૧૨. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને **अ** અને **ब**માં છેદે છે, અને એક બીજાનાં મધ્યબિંદુઓમાં થઈને પસાર થાય છે. **अ**માંથી બંને વર્તુળોને અનુક્રમે **क** અને **ड** બિંદુઓમાં છેદનારી એક લીટી દોરેલી છે; તો બતાવી આપો કે **कडब** સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

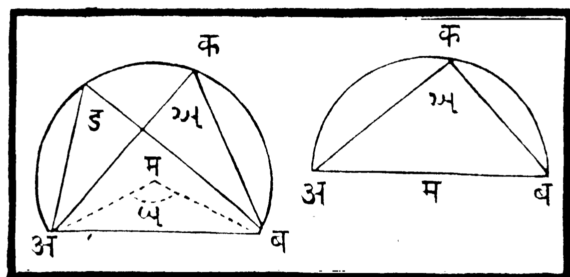
પ્રમેય ૪૦.

(૧) વર્તુળના એકજ ખંડમાંના ખુણાઓ સરખા હોય છે.

(૨) અર્ધવર્તુળના કરતાં મોટા વર્તુળખંડમાંનો ખુણો સાંકડો ખુણો હોય છે.

(૩) અર્ધવર્તુળમાંનો ખુણો કાટખુણો હોય છે.

(૪) અર્ધવર્તુળ કરતાં નાના વર્તુળખંડમાંનો ખુણો પહોળો ખુણો હોય છે.



આકૃતિ ૧. આકૃતિ ૨

(૧)

પક્ષ—अकब એ એક વર્તુળખંડ છે, અને તેના કૌંસ પર क એક બિંદુ છે. **अकब** ખુણાને અ અક્ષરથી ઓળખાવવામાં આવ્યો છે.

સાધ્ય—क બિંદુ પરિધ પર ગમે ત્યાં હોય, તોપણ અ ખુણાનું મહત્ત્વ બદલાતું નથી.

સિદ્ધતા—∵ कની સ્થિતિ પરિધ પર ગમે ત્યાં હોય, તોપણ અ ખુણો વર્તુળખંડ સિવાયના બાકીના કૌંસ પરના મધ્ય-કોણના (એટલે બ ખુણાના) અર્ધ બરોબર છે. (પ્ર૦ ૩૯)

એવીજ રીતે વર્તુળખંડના કૌંસ પરના **इ** અથવા બીજા કોઈ પણ બિંદુ આગળનો ખુણો બ ખુણાના અર્ધ બરોબર છે. માટે કોઈ પણ વર્તુળખંડમાંના બધા ખુણાઓ સરખા છે.

(૨)

પક્ષ—अकब વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો છે.

(જુઓ આકૃતિ ૧).

સાધ્ય—અ ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો છે.

સિદ્ધતા—∵ બ ખુણો બે કાટખુણા કરતાં નાનો છે;

(પ્ર૦ ૮ ઉ૦ ૨)

અને ∠**બ** = ૨∠**અ**; (પ્ર૦ ૩૯)

∴ ૨∠**અ** બે કાટખુણા કરતાં ઓછા;

∴ ∠**અ** એક કાટખુણા કરતાં ઓછો.

(૩)

પક્ષ—अकब ખંડ અર્ધવર્તુળ છે. (આકૃતિ ૨ જુઓ).

સાધ્ય—અ ખુણો કાટખુણો છે.

સિદ્ધતા—∵ ∠**अमब**=૨કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧)

અને ∠**अमब** = ૨∠**અ**;

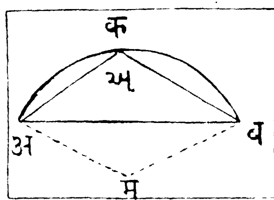
∴ ∠**અ** = એક કાટખુણો. (પ્ર૦ ૩૯).

(૪)

પક્ષ—अकब ખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો છે.

(જુઓ આકૃતિ ૩).

સાધ્ય—∠**અ**=પહોળો ખુણો.



આકૃતિ ૩.

સિદ્ધતા—∵ अमब બહિર્વક્ર ખુણો બે કાટખુણા કરતાં મોટો છે.

∴ ૨∠**અ** બે કાટખુણા કરતાં વધારે.

∴ ∠અ એક કાટખુણા કરતાં મોટો.

ઉપસિદ્ધાંત—વ્યાસ એ વર્તુળની મોટામાં મોટી જ્યા છે.

૪૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. **अबक** ત્રિકોણના **अ** બિંદુમાંથી **बक** પાયા પર **अड** લંબ દોરેલો છે, અને **अई** તે ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળનો વ્યાસ છે; તો સાબીત કરો કે **अबड** ને **अईक** ત્રિકોણો, તેમજ **अकड** ને **अईब** ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૨. **अबक** ત્રિકોણના **अ** ખુણાને દુભાગનાર લીટી પાયાને **ड**માં મળે છે, અને તે ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને **ई**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अबड** ને **अईक** ત્રિકોણો, તેમજ **अकड** ને **अईब** ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૩. એક વર્તુળના મધ્યબિંદુને કોઈ બહારના બિંદુ સાથે જોડનારી લીટીને વ્યાસ તરીકે લઈને એક વર્તુળ દોરો, અને એ વર્તુળોનાં છેદનબિંદુઓમાંના એકની સાથે બહારના બિંદુને જોડો. સાબીત કરો કે આ જોડનારી લીટી પહેલા વર્તુળની સ્પર્શલીટી છે.

૪. એક વર્તુળની ત્રિજ્યાને વ્યાસ તરીકે લઈ બીજું વર્તુળ દોરો, અને બતાવી આપો કે બંને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુમાંથી પહેલા વર્તુળમાં દોરેલી કોઈ પણ જ્યા બીજા (અંદરના) વર્તુળના પરિઘથી દુભાગાય છે.

૫. જો એક બીજાને છેદનારાં બે વર્તુળોના એક છેદન-બિંદુમાંથી બંને વર્તુળોના વ્યાસો દોરવામાં આવે, તો આ વ્યાસોના બીજા છેડાઓ અને વર્તુળોનું બીજું છેદનબિંદુ એ સઘળાં એકજ સીધી લીટીમાં છે.

૬. એકજ પાયા પરના, તેની એકજ બાજુએ આવેલા,

અને જેનાં શિરોબિંદુઓ આગળના ખુણાઓ સરખા હોય એવા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ આગળના ખુણાઓને દુભાગ-નારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૭. એક વર્તુળમાં **अब, अक** જ્યાઓ છે. **अब, अक** કૌંસોને અનુક્રમે **ड** ને **ई**માં દુભાગેલા છે. **डई** સાંધો. **डई** લીટી **अब, अक**ને અનુક્રમે **फ** ને **ग** માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે **अफ=अग.**

૮. **अबक** ત્રિકોણનો **ब** ખુણો કાટખુણો છે. **अब**ને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ **अक**ને **ड**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે આ વર્તુળને **ड** બિંદુમાં સ્પર્શ કરનારી લીટી **बक**ને દુભાગે છે.

૯. એક વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બે સમાંતર લીટીઓ દોરી છે, અને બંને સ્પર્શબિંદુઓમાંથી સમાંતર જ્યાઓ દોરી છે. સાબીત કરો કે આ જ્યાઓના છેડાઓ સાંધવાથી થએલો ચતુષ્કોણ કાટખુણ ચોખુણ છે.

૧૦. બે વર્તુળો એક બીજાને **अ** આગળ બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને **बक** લીટી તેમને **ब** ને **क**માં સ્પર્શ કરે છે; તો સાબીત કરો કે (૧) બંને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી એક સામાન્ય સ્પર્શલીટી **बक**ને દુભાગે છે; (૨) **बक** લીટી **अ** સાથે કાટખુણો કરે છે; અને (૩) **बक**ને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ **अ**માંથી પસાર થાય છે, અને બંને આપેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીને સ્પર્શ કરે છે.

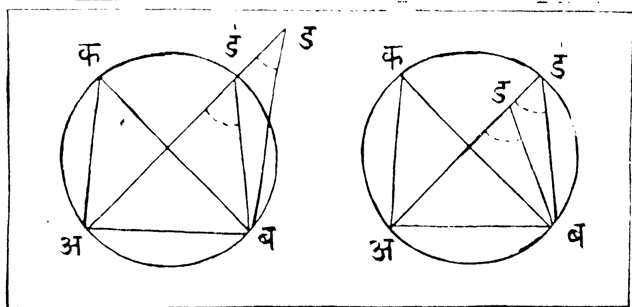
સૂચના—આપેલાં **अ, ब, क,** બિંદુઓમાંથી પસાર થાય એવું ફક્ત એકજ વર્તુળ દોરી શકાય. માટે ગમે તે ચારે બિંદુઓ **अ, ब, क, ड**માંથી પસાર થાય એવું વર્તુળ હંમેશાં દોરી શકાય નહિ. જ્યારે આ ચાર બિંદુઓ અમુક શરત પૂર્ણ કરતાં હોય, ત્યારેજ એમ બની શકે, અને ત્યારેજ **अ, ब,**

कमांथी પસાર થતું વર્તુળ डमांथी પણ પસાર થાય. આ શરત કઈ તે હવે પછીના પ્રમેયમાં સમજાવવામાં આવી છે.

વ્યાખ્યા—જો ચાર અથવા ચારથી વધારે બિંદુઓમાંથી વર્તુળ પસાર થઈ શકે એમ હોય, તો તે બિંદુઓને ચક્રીય બિંદુઓ કહે છે.

પ્રમેય ૪૧.

એક લીટીના બે છેડામાંથી તેની એકજ બાજુએ આવેલાં બે બિંદુઓ સુધી દોરેલી બબ્બે લીટીઓથી તે બિંદુઓ આગળ બનેલા ખુણા સરખા હોય, તો તે બે બિંદુઓ અને મૂળ લીટીના છેડાનાં બે બિંદુઓ—એ ચાર બિંદુઓ ચક્રીય હોય છે.



પક્ષ—अ, ब સાંધનારી अब લીટીના બે છેડામાંથી તેની એકજ બાજુ પર આવેલાં क અને ड બિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓથી તે બિંદુઓ આગળ બનેલા ખુણા સરખા છે.

સાધ્ય—अ, ब, क, ड બિંદુઓ ચક્રીય છે.

રચના—अ, ब, कમાં થઈને પસાર થાય એવું વર્તુળ દોરો. એવું વર્તુળ એકજ દોરી શકાશે. (પ્ર૦ ૩૨)

હવે આ વર્તુળ डમાં થઈને પણ પસાર થાય છે એટલું બતાવીએ એટલે થયું.

સિદ્ધતા—જો **अबक** વર્તુળ **ड**માં થઈને પસાર થતું ન હોય, તો તે **अड** (અથવા લંબાવેલી **अड**)ને **ड**'માં છેદશે. **बड**' સાંધો.

∠**अड**'**ब**=∠**अकब**. (પ્ર૦ ૪૦)

પણ ∠**अडब**=**अकब**; (પક્ષ)

∴ ∠**अड**'**ब**=∠**अडब**.

પરંતુ **अड**'**ब** ખુણો **अडब** ખુણાની બરોબર હોઈ શકે નહિ; કેમકે એક **डबड**' ત્રિકોણનો બહારનો અને બીજો માંહેનો સામેનો ખુણો છે.

∴ **अबक** વર્તુળ **ड** સિવાય બીજા બિંદુમાં થઈને પસાર થઈ શકે નહિ; એટલે કે તે **ड** બિંદુમાં થઈને જ પસાર થવું જોઈએ. માટે **अ,ब,क,ड** એ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૪૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક વર્તુળના પરિધ પર **अ,ब,क,ड** ચાર બિંદુઓ છે, અને **अक,बड** એક બીજીને **क्ष**માં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે **अबक्ष** ને **डकक्ष** ત્રિકોણો તેમજ **बकक्ष** ને **अडक्ष** ત્રિકોણો સમકોણ છે.

૨. **अबक** ત્રિકોણમાં **बई,कफ** અનુક્રમે **अक,अब** પર લંબ દોરવામાં આવેલા છે; તો બતાવી આપો કે **ब,फ,ई,क** બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૩. એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **म** છે; તેમાં **अब** ને **डक** સમાંતર જ્યાઓ છે; અને **अक,बड** એક બીજીને **ई**માં છેદે છે. સાબીત કરો કે **अ,म,ई,ड** બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૪. **अबक** ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી **अड,बई,कफ**, એ ત્રણ લંબો સામી બાજુ પર દોરેલા છે. બતાવી આપો કે **बकईफ, कअफड** અને **अबडई** એ ચતુષ્કોણો ચક્રીય છે.

૫. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની એક બાજુને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ પાયાને દુભાગે છે.

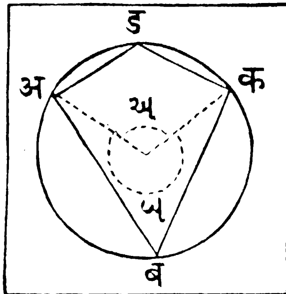
૬. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલાં વર્તુળો પાયાના મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૭. ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલાં વર્તુળો પાયામાં (અથવા પાયાના લંબાવેલા ભાગમાં) એક બીજાને છેદે છે.

૮. સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને વ્યાસ તરીકે લઈ કાઢેલાં ચાર વર્તુળોમાં એક બિંદુ સામાન્ય હોય છે.

પ્રમેય ૪૨.

વર્તુળમાં કાઢેલા ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણાઓ ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.



પક્ષ—વર્તુળમાં **अबकड** ચતુષ્કોણ કાઢેલો છે.

સાધ્ય—∠**अ** અને ∠**क**, તેમજ ∠**ब** અને ∠**ड** ન્યૂનતાપૂરક છે.

સિદ્ધતા—∵ કોઈ કૌંસ પરનો મધ્યકોણ તેજ કૌંસ પરના પરિઘિકોણ કરતાં બમણો હોય છે; (પ્ર૦ ૩૯)

અને **अडक**, **अबक** કૌંસો પરના ∠**અ** અને ∠**બ** એ મધ્યકોણો છે;

∴ ∠**અ** = ૨ ∠**ब**, અને ∠**બ** = ૨ ∠**ड**;

∴ ∠અ+∠બ=૨ (∠ब+∠ड).

પરંતુ ∠અ+∠બ=૪ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧ ઉ૦).

∴ ૨ (∠ब+∠ड)=૪ કાટખુણા;

∴ ∠ब+∠ड=૨ કાટખુણા.

(એજ પ્રમાણે ∠अ+∠क=૨ કાટખુણા એમ સિદ્ધ કરી શકાશે).

ઉપસિદ્ધાંત—વર્તુળની અંદર કાઢેલા ચતુષ્કોણનો બહારનો ખુણો તેની જોડેના અંદરના ખુણાની સામેના ખુણા બરાબર હોય છે.

૪૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ જ્યાથી વર્તુળના જે બે ખંડ પડે, તેમાંના ખુણાઓ ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૨. વર્તુળમાં કાઢેલા **अबकड** ચતુષ્કોણમાં ∠ब=∠ड; તો સિદ્ધ કરો કે **अक** તે વર્તુળનો વ્યાસ છે.

૩. વર્તુળમાં દોરેલા સમલંબ ચોખુણની અસમાંતર બાજુઓ સરખી હોય છે.

૪. વર્તુળમાં દોરેલો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કાટખુણ ચોખુણ છે.

૫. વર્તુળમાં દોરેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને મધ્યબિંદુમાં છેદે છે.

૬. વર્તુળમાં દોરેલા **अबकड** ચતુષ્કોણની **अड**, **बक** બાજુઓ **ई**માં મળે ત્યાંસુધી લંબાવવામાં આવી છે; તો એ પ્રમાણે થએલા **अबई** અને **डकई** ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૭. વર્તુળમાં દોરેલા **अबकड** ચતુષ્કોણની **अड**, **बक** બાજુઓ લંબાવવાથી **ई**માં મળે છે. હવે જો **ईअ**=**ईब** હોય, તો સિદ્ધ કરો કે **अब** લીટી **कड**ને સમાંતર છે.

૮. **अबकड** એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. **डअ,कब** લંબાવવાથી **ई**માં મળે છે, અને **अब,डक** લંબાવવાથી **फ**માં મળે છે. હવે સિદ્ધ કરો કે જો **अ,ई,फ,क** બિંદુઓ ચક્રીય હોય, તો **ईफ** તેમાં થઈને તેમાં પસાર થતા વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને **बड** એ **अबकड** વર્તુળનો વ્યાસ છે.

૯. વર્તુળમાં દોરેલા **अबकड** ચતુષ્કોણનો ∠**अ**=૯૦°, અને **म** વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે ∠**मबड** + ∠**मडब**=∠**कबड** + ∠**कडब**.

૧૦. બે વર્તુળો એક બીજાને **ई** અને **फ**માં છેદે છે; **अईब** અને **कफड** ગમે તે બે લીટીઓ પરિધિને **अ,ब,क, ड**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अक** લીટી **बड**ને સમાંતર છે.

૧૧. વર્તુળમાં દોરેલા ચોખુણનો બહારનો ખુણો અને તેની જોડેના અંદરના ખુણા સામેનો ખુણો, એ બંનેને દુભાગનારી લીટીઓ વર્તુળના પરિધ પર મળે છે.

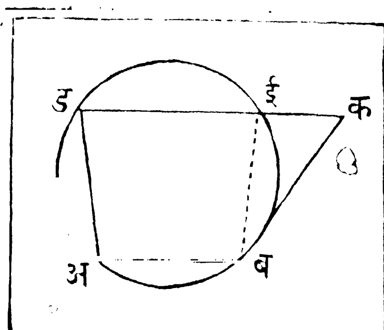
૧૨. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો **अब** પાયો એક વર્તુળની જ્યા છે. શિરોબિંદુ **क** વર્તુળની બહાર છે. **अक, बक** સરખી બાજુઓ પરિધને અનુક્રમે **ड** અને **ई** બિંદુમાં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે **कड=कई**.

૧૩. વર્તુળમાં દોરેલા ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનાર લીટી જે બિંદુમાં વર્તુળને મળે છે, તે બિંદુ ત્રિકોણનાં બીજાં બે શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૪. **अबकड** ચતુષ્કોણની **अब,अड** બાજુઓ અને **अक** કર્ણ સરખાં છે; તો સાબીત કરો કે $\frac{૧}{૨}$∠**बअड**= ∠**कबड** + ∠**कडब**.

પ્રમેય ૪૩.

કોઈ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણાઓ ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.



પક્ષ—**अबकड** ચતુષ્કોણના **अ** ને **क** ખુણાઓ ન્યૂનતા-પૂરક છે.

સાધ્ય—**अबकड** ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

રચના—**अ,ब,ड**માં થઈને પસાર થતું એક વર્તુળ દોરો. જો આ વર્તુળ **क**માં થઈને જતું ન હોય, તો તે **डक** અથવા લંબાવેલી **डक**ને **ई**માં છેદશે.

ईब સાંધો.

સિદ્ધતા—∴ **अबईड** ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે; (રચના)

∴ ∠**बईड** એ **अ**નો ન્યૂનતાપૂરક છે. (પ્ર૦ ૪૨)

પણ **क** ખુણો **अ** ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક છે; (પક્ષ)

∴ ∠**बईड** = ∠**क**.

પણ આ અશક્ય છે. (પ્ર૦ ૮ ઉ. ૩)

∴ **अबड** વર્તુળ **डक** લીટીમાંના **क** સિવાય બીજા કોઈ પણ બિંદુમાં થઈને જશે નહિ.

∴ **अबकड** ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જો કોઈ ચતુષ્કોણની એક બાજુ લંબાવવામાં આવે, અને તેથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેનાની સામેના ખુણાની બરોબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

૪૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ કાટખુણ ચોખુણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

૨. સમદ્વિબાજુ (ટ્રાપીઝિઅમ) સમલંબ ચોખુણ ચક્રીય છે.

૩. **म** એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **अब, कड** સમાંતર જ્યાઓ છે. **अक, बड**ને લંબાવવાથી તેઓ **न**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अ,न,ड,म** ચક્રીય છે.

૪. **अबक** ત્રિકોણમાં **बई, कफ** લંબો એક બીજાને **ह**માં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે **अईहफ** ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

૫. જો બે વર્તુળોમાં સરખી જ્યાઓના સામેના પરિધ-કોણો સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે વર્તુળો સરખાં હોય છે.

૬. **अबकड** એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. **अब, डक** લંબા-વવાથી **फ**માં મળે છે, અને **अड, बक** લંબાવવાથી **ई**માં મળે છે; તો **बकफ, कडई** ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો **ईफ** લીટી પર મળે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. કોઈ પણ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ-થી થતો ચતુષ્કોણ ચક્રીય હોય છે.

૮. કોઈ પણ ત્રિકોણની બાજુઓમાં એકેક બિંદુ લઈ તેમને જોડી ત્રિકોણ બનાવવામાં આવે, તો તે લીટીઓથી થએલા ત્રિકોણ સિવાયના બીજા ત્રણ ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો એકજ બિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

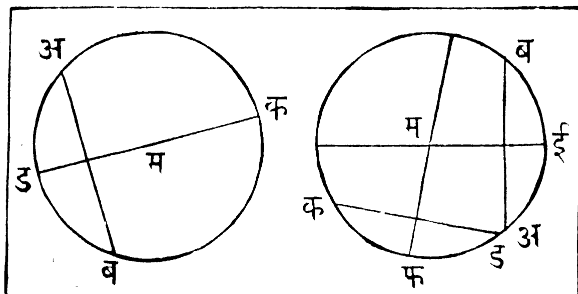
૯. **अबकड** એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે; **अ,ब**-માં થઈને દોરેલું વર્તુળ **अड,बक**ને (જરૂર પડે તો લંબા-વવાથી) **ई** ને **फ** બિંદુઓમાં મળે છે. સાબીત કરો કે **ई,फ,क,ड** ચક્રીય છે.

પ્રકરણ ૩.

(કૃત્યો).

કૃત્ય ૧૯.

આપેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ કાઢવું.



अबक એક આપેલું વર્તુળ છે.

(પહેલી રીત.)

રચના—अब જ્યા દોરો. એ જ્યાને દુભાગનાર લંબ દોરો. એ લંબને પરિધિને મળતાં સુધી બંને બાજુએ લંબાવો, અને તેને **म** બિંદુમાં દુભાગો. **म** એ માગેલું મધ્યબિંદુ છે.

સિદ્ધતા—∵ જ્યાને દુભાગનાર લંબમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ હોય છે; (પ્ર૦ ૩૧ ઉ૦).

∴ **डक**માં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

∵ પરિધિ પરનાં સઘળાં બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે;

∴ **डक**નું મધ્યબિંદુ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

(બીજી રીત.)—

अब જ્યા દોરો. એક બીજી અસમાંતર જ્યા **कड** દોરો. **अब**ને દુભાગનાર લંબ દોરો. **कड**ને દુભાગનાર લંબ પણ

દોરો. ધારો કે આ લંબો **ઈમ** ને **ફમ** છે, અને તેઓ એક બીજાને **મ**માં છેદે છે.

મ એ માગેલું મધ્યબિંદુ છે.

સિદ્ધતા—∵ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ જ્યાને દુભાગનાર લંબમાં હોય છે; (પ્ર૦ ૩૧ ઉ૦).

∴ મધ્યબિંદુ **ઈમ**માં છે.

એજ કારણથી મધ્યબિંદુ **ફમ**માં છે.

∵ મધ્યબિંદુ **ઈમ**માં છે અને **ફમ**માં પણ છે;

∴ એ બંનેનું સામાન્ય બિંદુ મધ્યબિંદુ છે.

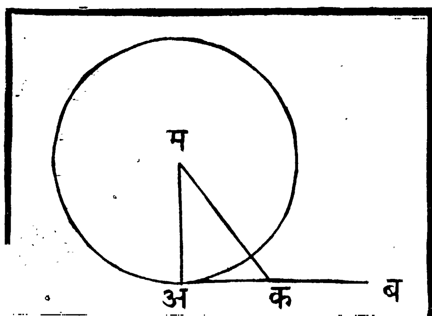
એવું બિંદુ **મ** છે.

∴ **મ** એ મધ્યબિંદુ છે.

કૃત્ય ૧૭.

પરિધ પરના અથવા પરિધ બહાર આપેલા બિંદુમાંથી આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટી દોરો.

અ આપેલું બિંદુ છે.



ના (૧) અ બિંદુ પરિધ પર હોય, તો **અમ** ત્રિજ્યા દોરો. **અ** બિંદુમાંથી **અમ**ને કાટખુણે **અબ** લીટી દોરો. **અબ** એ સ્પર્શલીટી છે.

સિદ્ધતા—**મ**માંથી **અબ**ને મળનારી **મઅ** સિવાય બીજી કોઈ **મક** લીટી દોરો.

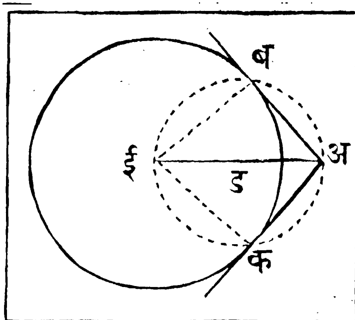
∵ **मअ** લંબ છે, અને **मक** લંબ નહિ એવી તિર્યક્ લીટી છે;

∴ **मक** એ **मअ** કરતાં મોટી છે; (પ્ર૦ ૨૧).

∴ **क** બિંદુ પરિધની બહાર છે.

એજ પ્રમાણે સાબીત કરી શકાશે કે **अ** સિવાયનાં **अब**-માંનાં સઘળાં બિંદુઓ પરિધની બહાર છે.

∴ **अब** એ સ્પર્શલીટી છે.



(૨) **अ** બિંદુ પરિધની બહાર હોય, તો ધારો કે **ई** વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **अई** સાંધો. **अई**ને **ड**માં દુભાગો. **ड**ને મધ્યબિંદુ અને **डई**ને ત્રિજ્યા લઈ આપેલા વર્તુળને **ब** તથા **क**માં છેદે એવું એક વર્તુળ દોરો. **अब**, **अक** સાંધો.

अब, अक સ્પર્શલીટીઓ છે.

સિદ્ધતા—∵ **अबई** એ અર્ધવર્તુળ છે;

∴ તેમાંનો ∠**अबई**=કાટખુણો. (પ્ર૦ ૪૦).

∵ **अब** લીટી **ईब** ત્રિજ્યા સાથે કાટખુણો કરે છે;

∴ **अब** સ્પર્શલીટી છે. (કૃત્ય ૧૭, ભાગ ૧).

એજ પ્રમાણે સાબીત થઈ શકશે કે **अक** સ્પર્શલીટી છે.

૧૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળના મધ્યબિંદુથી જે બહારના બિંદુનું અંતર વર્તુળના વ્યાસ જેટલું હોય, તે બિંદુમાંથી કાઢેલી સ્પર્શલીટીએ વચ્ચેનો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

૨. એક આપેલા બિંદુમાંથી એક સીધી લીટી એવી દોરો, કે આપેલા બીજા બિંદુમાંથી તેના પર પડતો લંબ એક આપેલી અંતવાન સીધી લીટી બરોબર થાય.

૩. **अ**,**ब** આપેલાં બિંદુઓ છે. અને મધ્યબિંદુ લઈ એક એવું વર્તુળ દોરો કે **ब** બિંદુમાંથી દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી, **अब** કરતાં જેની લંબાઈ ઓછી હોય, એવી એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

૪. **अ** ખુણો; **अब** બાજુ, અને **अ**માંથી **बक** પર પડતો લંબ, એ આપેલાં છે; તો **अबक** ત્રિકોણ દોરો.

૫. આપેલા બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈ એક એવું વર્તુળ દોરો કે જે એક આપેલી સીધી લીટીને સ્પર્શ કરે.

૬. આપેલી લીટીને આપેલા બિંદુમાં સ્પર્શ કરે એવું એક આપેલી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો.

૭. એક એવું વર્તુળ દોરો કે જે એક આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થાય અને આપેલી લીટીને આપેલા બિંદુમાં સ્પર્શ કરે.

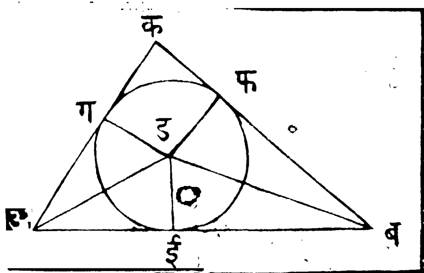
૮. આપેલી લીટીને સ્પર્શ કરનારાં અને જેની ત્રિજ્યાઓ આપેલી લીટીઓની બરોબર અનુક્રમે હોય, એવાં અનેક વર્તુળો દોરો.

૯. **अ** ત્રિજ્યાવાળું એક **क्ष** વર્તુળ છે. **क्ष**ના મધ્યબિંદુથી **ब** અંતરે એક સીધી લીટી છે; તો આપેલા વર્તુળને અને આપેલી લીટીને સ્પર્શ કરે એવું **ज्ञ** વર્તુળ કાઢો.

૧૦. એક આપેલા વર્તુળને આપેલા બિંદુમાં સ્પર્શ કરે અને આપેલા બીજા બિંદુમાંથી પસાર થાય એવું એક વર્તુળ દોરો.

કૃત્ય ૧૮.

આપેલા ત્રિકોણમાં વર્તુળ દોરવું.



अबक આપેલો ત્રિકોણ છે.

રચના—**अ** અને **ब** ખુણાઓને દુભાગનારી **अड**, **बड** લીટીઓ દોરો. **ड** બિંદુમાંથી **अब** પર **डई**, **बक** પર **डफ**, અને **अक** પર **डग** લંબ દોરો.

સિદ્ધતા—∵ **अडग** અને **अडई** ત્રિકોણોમાં—

∠**गअड** = ∠**ईअड**; (રચના).

∠**अगड** = ∠**अईड**; (કાટખુણા).

अड બંનેમાં સામાન્ય છે;

∴ **डग** = **डई**. (પ્ર૦ ૧૧).

એજ પ્રમાણે **डई**=**डफ** એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

∴ **डई**=**डग**=**डफ**.

માટે **ड** મધ્યબિંદુ લઈને **डई** ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ **ग** અને **फ** બિંદુમાં થઈને પસાર થશે. **डई**, **डग**, **डफ** ત્રિજ્યાઓ આપેલા ત્રિકોણની બાજુઓ સાથે કાટખુણો કરે છે; તે પરથી સિદ્ધ થાય છે કે **अब**, **बक**, **कअ** દોરેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીઓ છે; અર્થાત્ આપેલા ત્રિકોણમાં વર્તુળ દોરાયું છે.

૧૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. ૧૮મા કૃત્યની આકૃતિમાં **कड** સાંધો, અને સાબીત કરો કે **कड** લીટી **क** ખુણાને દુભાગે છે.

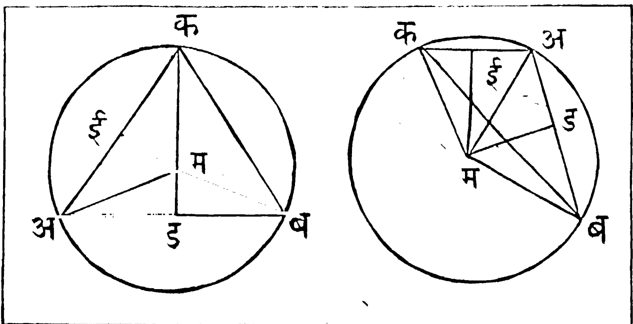
૨. જેની બાજુઓ અનુક્રમે ૩", ૨·૬", ૨·૮" અને ૨·૪", ૨", ૧·૮" હોય એવા બે ત્રિકોણોમાં વર્તુળો દોરો.

૩. બે સમાંતર સીધી લીટીઓ અને તેમને છેદનારી એક ત્રીજી લીટી એ ત્રણેને સ્પર્શ કરનાર વર્તુળ દોરો.

૪. ૧૮મા કૃત્યની આકૃતિની મદદથી સાબીત કરો કે કોઈ પણ ત્રિકોણ, તે ત્રિકોણની પરિમિતિ જેવડી એક બાજુ અને તેની અંદર દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા જેવડી બીજી બાજુ વડે થએલા કાટખુણ ચોખુણના અર્ધ બરોબર છે.

કૃત્ય ૧૯.

આપેલા ત્રિકોણની આસપાસ વર્તુળ દોરવું; અર્થાત્ ત્રણ આપેલાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું વર્તુળ દોરવું.



अ,ब,क ત્રણ આપેલાં બિંદુઓ છે, અથવા આપેલા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે. (જો બિંદુઓ આપ્યાં હોય, તો તેમને સાંધીને ત્રિકોણ બનાવો).

રચના—**अब**ને **ड** બિંદુમાં અને **अक**ને **ई** બિંદુમાં દુભાગનાર લંબ દોરો. ધારો કે તે **म**માં મળે છે. **मअ** સાંધો. **म**ને મધ્યબિંદુ લઈને **मअ** ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ આપેલા ત્રિકોણની આસપાસનું વર્તુળ થશે.

સિદ્ધતા—(**मब** અને **मक** સાંધો).

∵ **अडम** ને **बडम** ત્રિકોણોમાં.—

अड=**बड**; (રચના).

डम સામાન્ય છે;

અને ∠**अडम** = ∠**बडम**;

∴ **अम** = **बम**. (પ્ર૦ ૧૦).

એજ પ્રમાણે **अम** = **कम**;

∴ **अम** = **बम** = **कम**.

માટે **म**ને મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને **मअ** ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ **अ**,**ब**,**क**માં થઈને પસાર થશે.

૧૯મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. ઉપલા કૃત્યની આકૃતિમાં, **बक**ને **फ** બિંદુમાં દુભાગો, અને **मफ** સાંધો. સાબીત કરો કે **मफ** લીટી **कब** પર લંબ છે. **बक** પર **मफ** લંબ કાઢો, અને તે **बक**ને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૨. બે આપેલાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું અને આપેલી લીટીમાં જેનું મધ્યબિંદુ હોય એવું એક વર્તુળ દોરો.*

૩. બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતું અને આપેલા વર્તુળના પરિધ પર જેનું મધ્યબિંદુ હોય એવું એક વર્તુળ દોરો.*

૪. બે આપેલાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું અને આપેલી સીધી લીટી બરોબરની ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો.*

---

* કયા પ્રસંગોમાં ઉપલાં કૃત્યોના એક કરતાં વધારે જવાબ નીકળશે ? કયા પ્રસંગોમાં એકે જવાબ નહિ આવે ?

૫. ब ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના મધ્યબિંદુથી क અંતરે આવેલા એક બિંદુમાંથી એવી એક ड લંબાઈની લીટી દોરો કે તેનો છેડો આપેલા વર્તુળના પરિઘ પર પડે.*

૬. સમબાજુ ત્રિકોણમાં અને તેની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુ એકજ હોય છે.

૭. પાયો, ઉંચાઈ, અને આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા આપેલાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૮. આપેલાં ત્રણ બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું એક વર્તુળ દોરવું છે. આપેલાં બિંદુઓની સ્થિતિ કેવી હોય તો આ કૃત્ય અશક્ય થાય ?

૯. આપેલાં ચાર બિંદુઓમાં થઈને જેનો પરિઘ પસાર થાય એવું વર્તુળ કાઢવા માટે ચારે બિંદુઓની સ્થિતિ કેવી હોવી જોઈએ ?

૧૦. સમબાજુ ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળનો વ્યાસ તેજ ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળના વ્યાસથી બમણો હોય છે.

૧૧. કોઈ બહુકોણ આકૃતિની બાજુઓને દુભાગનાર લંબો એક બિંદુમાં મળતાં હોય, તો તે બહુકોણ આકૃતિની આસપાસ વર્તુળ દોરી શકાય.



નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૨.

ખંડ ૩.

પ્રકરણ ૧.

(ક્ષેત્રફળ સંબંધી પ્રમેયો.)

ક્ષેત્રફળ વિષેના પ્રમેય સંબંધમાં નીચેની સમજુતી ધ્યાનમાં રાખવીઃ—

(૧) ગુજરાતી અક્ષરો જ્યાં લીટીને માટે વાપર્યા હોય, ત્યાં તે લીટીની લંબાઈ (અર્થાત્ કોઈ પણ સંખ્યા) દર્શાવે છે, એમ સમજવું.

(૨) **અ . બ** એટલે **અ×બ**, અને **અ** તથા **બ** લીટીઓથી થતા કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ **અ×બ** બરોબર હોય છે, માટે **અ . બ** એટલે **અ,બ** લીટીઓથી થતો કાટખુણ ચોખુણ અથવા એ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ. એજ પ્રમાણે **ક્ષ.અબ; ક્ષ (અ+બ); અબ**... ૯૦ સમજવાં.

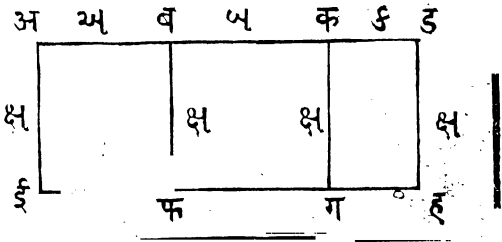
(૩) **ક્ષ** એકમ લંબાઈની લીટી પરના ચોરસમાં ચોરસ એકમોની સંખ્યા **ક્ષ×ક્ષ** હોય છે, અને **ક્ષ×ક્ષ=ક્ષ**^{2}; માટે **ક્ષ**^{2} એટલે **ક્ષ** ઉપરનો ચોરસ અથવા એ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ.

ક્ષ (અ+બ+ક...)=ક્ષઅ+ક્ષબ+ક્ષક...... એ અક્ષર-ગણિતની સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય.—

પ્રમેય અ.

જો બે સીધી લીટીઓમાંથી એકના ગમે તેટલા

ભાગ કરવામાં આવે, તેા તે બે સીધી લીટીઓથી થતેા કાટખુણ ચેાખુણ અવિભાજિત લીટી અને વિભાજિત લીટીના જુદા જુદા ભાગેાથી થતા કાટખુણ ચેાખુણેાના સરવાળા બરેાબર હેાય છે.



રચના—એક બીજી સાથે કાટખુણેા કરનારી બે અમર્યાદ લીટીઓ દેારેા. એક લીટી પર **અ,બ,ક...** લંબાઈના **અબ,બક,કડ....** ભાગેાનાં એક પછી એક નિશાન કરેા; અને બીજી લીટી પર **ક્ષ** જેવડા **અઈ** ભાગનું નિશાન કરેા. **બ,ક,ડ**માંથી **અઈ**ને સમાંતર, અને **ઈ**માંથી **અડ**ને સમાંતર લીટીઓ દેારેા, અને ચતુષ્કેાણેા પુરા કરેા.

સિદ્ધતા—∵ **અઈ, બફ, કગ** અને **ડહ** સમાંતર છે; (રચના)

અને **અડ** લીટી **ઈહ**ને સમાંતર છે; (રચના)

∴ આકૃતિમાંના સઘળા ચતુષ્કેાણેા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કેાણેા છે.

∵ ∠**બઅઈ**=∠**કબફ**=∠**ડકગ**, (પ્ર૦ ૬)

અને ∠**બઅઈ**=એક કાટખુણેા. (રચના)

∴ **કબફ** અને **ડકગ** એ દરેક એક કાટખુણા બરેાબર છે.

∵ **અહ, અફ, બગ, કહ** એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કેાણેાનેા એક ખુણેા કાટખુણેા છે.

∴ તે સઘળા કાટખુણ ચેાખુણેા છે. (પ્ર૦ ૨૨. ઉ૦૨)

હવે આકૃતિ પરથી.—

अह=अफ + बग + कह.

પણ अह એટલે अई · अड=ક્ષ=(અ+બ+ક);

अफ એટલે अई · अब=ક્ષઅ;

बग એટલે बफ · बक=ક્ષબ;

कह એટલે कग · कड=ક્ષક;

∴ ક્ષ (અ+બ+ક)=ક્ષઅ + ક્ષબ + ક્ષક.

સૂચના—ઉપલી સિદ્ધતાથી સાબીત કીધું કે ક્ષ(અ+બ+ક)=ક્ષઅ + ક્ષબ + ક્ષક. એ પરથી ખુલ્લુંજ છે કે એને લગતી અક્ષરગણિતની સમાનતા પણ સિદ્ધ થઈ. એજ ટીકા હવે પછીના ત્રણ પ્રમેયોને પણ લાગુ પડે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—એક સીધી લીટીના ગમે તેવા બે ભાગ કરવામાં આવે, તો આખી લીટી અને દરેક ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણો એકઠા મળીને આખી લીટી પરના ચોરસ બરોબર હોય છે.

એટલે કે (અ+બ)અ+(અ+બ)બ=(અ+બ)^{2}.

સિદ્ધતા—∵ ક્ષ (અ+બ)=ક્ષઅ+ક્ષબ, (પ્ર૦ अ)

∴ ક્ષઅ+ક્ષબ=ક્ષ(અ+બ).

ક્ષ=(અ+બ) લઈએ તો

(અ+બ)અ+(અ+બ)બ=(અ+બ) (અ+બ),

=(અ+બ)^{2}.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—એક સીધી લીટીના ગમે તેવા બે ભાગ કરવામાં આવે, તો આખી લીટી અને બેમાંના એક ભાગથી થતો કાટખુણ ચોખુણ, તે ભાગ પરનો ચોરસ અને બે ભાગોથી થતો કાટખુણ ચોખુણ એ બંનેના સરવાળા બરોબર હોય છે.

(અ+બ)અ = અ^{2}+અબ.

अ પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક સીધી લીટી પર અનુક્રમે अ,ब,क,ड એવાં ચાર બિંદુઓ લીધાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે

अब·कड+बक·अड = अक·बड.

૨. (અ−બ)ક=અક−બક.

૩. અ,બ બે આપેલી લીટીઓ છે; તો બતાવી આપો કે ૨ અ× $\frac{\text{બ}}{\text{૨}}$=૩અ× $\frac{\text{બ}}{\text{૩}}$=૩બ× $\frac{\text{અ}}{\text{૩}}$.

૪. अबना क અને ड બિંદુમાં ત્રણ સરખા ભાગ કર્યા છે, અને अबને ई સુધી લંબાવી છે; તો સિદ્ધ કરો કે कई·ईड=अई·ईब+२अक^{2}.

૫. अबकड એક સીધી લીટી છે. अब=बक અને अक=कड હોય, તો अड·डक=૮अब^{2}.

૬. फईअबकड લીટીમાં अ એ फकનું તેમજ ईबનું મધ્યબિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે

बक·कई+कड·डफ=बड·डई.

(અ+બ)^{2}=અ^{2}+બ^{2}+૨અબ એ અક્ષરગણિતની સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય—

પ્રમેય ब.

કોઈ પણ સીધી લીટીના ગમે તેવા બે ભાગ કરવામાં આવે, તો આખી લીટી પરનો ચોરસ, બંને ભાગ ઉપરના ચોરસના તથા બેઉ ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈના સરવાળા બરોબર હોય છે.

અથવા

બે લીટી મળીને થએલી એક સીધી લીટી પરનો ચોરસ બંને લીટી પરના ચોરસના તથા બેઉ ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈના સરવાળા બરોબર હોય છે.

રચના—એક બીજી પર લંબ હોય એવી બે લીટીઓ દોરો. એમાંની એક લીટી પર **અ, બ** લંબાઈ બરોબરનાં અનુક્રમે **अब, बक** ભાગોનાં નિશાન કરો. બીજી લીટી પર **બ, અ** લંબાઈ બરોબરનાં **अल, लग** ભાગોનાં નિશાન કરો. **ब,क**માંથી **अग**ને સમાંતર અને **ल,ग**માંથી **अक**ને સમાંતર લીટીઓ દોરી ચતુષ્કોણો પુરા કરો.

સિદ્ધતા—(ગયા પ્રમેય **अ**માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ આકૃતિમાંના બધા ચતુષ્કોણો કાટખુણુ ચોખુણો છે). હવે,

∵ **અ=अब=लफ**, અને **અ=लग**,(પ્ર૦૨૨ અને રચના)

∴ **लफ=लग.**

∴ **गफ=અ** ઉપરનો ચોરસ. (પ્ર૦ ૨૨ ઉ. ૩)

∵ **બ=बक**, અને **બ=अल=बफ;**

∴ **बक=बफ.**

∴ **कफ** એ **બ** ઉપરનો ચોરસ છે.

હવે, આકૃતિ પરથી—

अड=गफ+फक+फअ+फड.

પરંતુ अड=(અ+બ)^{2};

  गफ=અ^{2};

  फक=બ^{2};

  फअ=અબ;

  फड=અબ;

∴ (અ+બ)^{2}=અ^{2}+બ^{2} + ૨ અબ.

ब પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ લીટી પરનો ચોરસ તે લીટીના અર્ધ ઉપરના ચોરસ કરતાં ચારગણો હોય છે.

૨. अबના क બિંદુમાં એવા બે ભાગ પડે છે કે अब^{2}= अक^{2}+૨ बक^{2}; તો સિદ્ધ કરો કે बक= ૨ अक.

૩. એક લીટીના ૨ : ૧ના પ્રમાણમાં બે ભાગ પાડવામાં આવે, તો આખી લીટી પરનો ચોરસ, નાના ભાગ પરના ચોરસના તથા બીજા ભાગ પરના ચોરસની બમણાઈના સરવાળા બરોબર હોય છે.

૪. એક લીટીના ગમે તેટલા ભાગ પાડવામાં આવે, તો આખી લીટી પરનો ચોરસ, જુદા જુદા ભાગો પરના ચોરસના તથા એ ભાગોમાંની દરેક જોડથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈના સરવાળા બરોબર હોય છે.

૫. अबને कમાં દુભાગી ड સુધી લંબાવી છે. સિદ્ધ કરો કે अड^{2}–डब^{2}= ૪ अक.कड.

૬. अडના ब બિંદુ આગળ બે સરખા ભાગ પડે છે, અને अ બિંદુ આગળ એવા બે વિષમ ભાગ પડે છે કે अक·कड = ૩बक^{2}; તો સિદ્ધ કરો કે बड= ૨बक.

૭. अबના क બિંદુ આગળ એવા બે ભાગ પડે છે કે अब·बक = अक^{2} कअમાંથી कब જેવડો कड ભાગ કાપી કાઢેલો છે; તો સિદ્ધ કરો કે कअ·अड=कड^{2}.

૮. **अब**ના **ह** બિંદુ આગળ એવા બે ભાગ પડે છે કે **अह**^{2}=**अब·हब** છે; **बअ**ને **क** સુધી એવી રીતે લંબાવી છે કે **बक**= ૩**बह**; તો સિદ્ધ કરો કે **बह**^{2}=**बअ·अक**.

૯. જો એક સીધી લીટીમાં **अ,ब,क,ड** એવાં ચાર બિંદુઓ અનુક્રમે લેવામાં આવે, તો

(૧) **अक**^{2}+**बड**^{2}=**अब**^{2}+**कड**^{2}+૨**अड·बक**.

(૨) **अड**^{2}+**बक**^{2}=**अक**^{2}+**बड**^{2}+૨**अब·कड**.

૧૦. **अब**ને **क** આગળ દુભાગી **ड** સુધી એવી રીતે લંબાવી છે કે **कड**^{2}=**अब**^{2}+**बक**^{2}; તો સિદ્ધ કરો કે **अड·डब**=**अब**^{2}.

૧૧. એક સીધી લીટીમાં **अ,ब,क,ड,प** એ પાંચ બિંદુઓ અનુક્રમે એવી રીતે લીધાં છે કે **अब**=**बक**=**कड** છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अप, डप** ઉપરના ચોરસોનો તફાવત **बप, कप** ઉપરના ચોરસોના તફાવત કરતાં ત્રણગણો છે.

૧૨. **अबकडई** એક લીટી છે, અને **क** એ **बड**નું મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **अक**^{2}+**बई·डई**=**ईक**^{2}+**अब·अड**.

(અ–બ)^2=અ^2+બ^2–૨અબ, એ અક્ષરગણિતની સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય.

પ્રમેય क.

બે લીટીઓના તફાવત ઉપરનો ચોરસ, તે બે લીટીઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો અને તે બે લીટીઓથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈ, એ બે વચ્ચેના તફાવત બરોબર હોય છે.

અ ને બ આપેલી લીટીઓ છે, અને ધારો કે અ લીટી બ કરતાં મોટી છે.

અ લંબાઈની એક **अब** લીટી લો. તેમાંથી બ જેવડો એક ભાગ કાપી કાઢો. **अब** ઉપર **अबडई** ચોરસ દોરો અને ઉપલી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે આકૃતિ પુરી કરો.*

સિદ્ધતા—આકૃતિ પરથી—

हय=अड+कफ−अफ−कड.

પરંતુ **हय**=(અ−બ)²;

अड = અ²;

कफ = બ²;

अफ = અબ;

*આ અને પછીના પ્રમેયમાં રચના અને સિદ્ધતાનો કેટલોક ભાગ अ અને ब પ્રમેયના જેવોજ હોવાથી તેની પુનરુક્તિ કરી નથી; પણ વિદ્યાર્થીઓએ તો એ ભાગ સવિસ્તર બતાવવાની જરૂરજ છે.

कड = અબ;

$\therefore$ (અ−બ)^2=અ^2+બ^2−અબ−અબ=અ^2+ બ^2− ૨ અબ.

આ પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા નીચે પ્રમાણે પણ આપી શકાયઃ— જો કોઈ લીટીના બે ભાગ કરવામાં આવે, તો એ બે ભાગો વચ્ચેના તફાવત ઉપરનો ચોરસ, તે બે ભાગો ઉપરના ચોરસ-ના સરવાળામાંથી તે બે ભાગોથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈ બાદ કરતાં જે રહે તેની બરોબર હોય છે.

क પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. (અ+બ)^2−(અ−બ)^2= ૪અબ.

૨. બે લીટીઓથી થએલા કાટખુણ ચોખુણનો તથા તે બે લીટીઓના તફાવતના અર્ધ ઉપરના ચોરસનો સરવાળો તે બે લીટીના સરવાળાના અર્ધ ઉપરના ચોરસ બરોબર હોય છે.

૩. એક આપેલી લીટીના કયા બિંદુમાં બે ભાગ કરવામાં આવે તો તે બે ભાગોથી થતો કાટખુણ ચોખુણ મોટામાં મોટો થાય ?



(અ^2−બ^2) = (અ−બ) (અ+બ) એ અક્ષરગણિતની સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય—

પ્રમેય ड.

બે લીટીઓ પરના ચોરસોનો તફાવત બે લીટીઓના સરવાળા તથા તફાવતથી થતા કાટખુણ ચોખુણ બરોબર હોય છે.

પહેલી રીત.

અ

બ ર

य ल

અ-બ

બ

ह

स અ-બ

અ

उ-ल

श

બ અ-બ

व

ધારો કે **અ** લીટી **બ** કરતાં મોટી છે.

અ લંબાઈની એક **यल** લીટી દોરો. તેમાંથી **બ** જેવડો **यर** ભાગ કાપી કાઢો. **यल** પર **यलवश** ચોરસ દોરો. **यश**માંથી **બ** બરોબરનો **यह** ભાગ કાપી કાઢો. **र** અને **ह**માંથી અનુક્રમે **यश**,**यल**ને સમાંતર લીટીઓ દોરો, અને આગળ બતાવ્યા પ્રમાણે આકૃતિ પુરી કરો.

સિદ્ધતા—આકૃતિ ઉપરથી—

यव−**यस** = **शस**+**रव**.

પરંતુ **यव**=અ^2;

यस=બ^2;

शस= (અ−બ) બ;

रव= (અ−બ)અ;

शस+**रव**=(અ−બ)અ+(અ−બ)બ=

(અ−બ) (અ+બ); (પ્ર૦ अ)

∴ (અ^2−બ^2)=(અ+બ) (અ−બ).

બીજી રીત.

ધારો કે અ લીટી બ કરતાં મોટી છે.

અથી બમણી એક अक લીટી દોરો. તેના મધ્યબિંદુ बમાંથી બ જેવડી લંબાઈનો એક बड ભાગ પાડો. बक પર बकईस ચોરસ દોરો. कईने સમાંતર डय દોરો. डक =डफ કરો. कईने સમાંતર अह દોરો. फ બિંદુમાંથી अकને સમાંતર फह દોરો.

સિદ્ધતા—

(આકૃતિ પરથી) बई−गय=बफ+डई.

પરંતુ डई=અ(અ−બ)=अग;

∴ बई−गय=बफ+अग;

= अफ.

પરંતુ बई=$અ^2$

गय=$બ^2$;

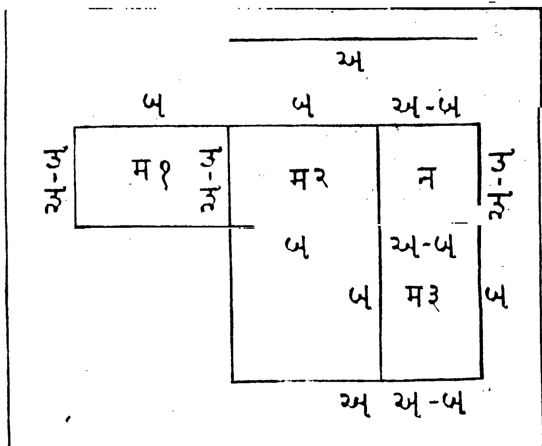
अफ=(અ+બ)(અ−બ).

∴ ($અ^2$−$બ^2$)=(અ+બ)(અ−બ).

ઉપસિદ્ધાંત ૧. જો કોઈ લીટીના બે સરખા ને બે વિષમ ભાગ પાડવામાં આવે, તો વિષમ ભાગોથી

થતો કાટખુણુ ચોખુણુ અને છેદનબિંદુઓ વચ્ચેની લીટી પરનો ચોરસ એ બે મળીને અડધી લીટી પરના ચોરસ બરોબર હોય છે.

ત્રીજી રીત.



ધારો કે **અ** લીટી **બ** કરતાં મોટી છે.

બથી બમણી લંબાઈની એક લીટી દોરો. તેના મધ્ય-બિંદુથી **અ** જેટલી લંબાઈનો એક ભાગ પડે એટલે સુધી તેને લંબાવો. આગળ બતાવ્યા પ્રમાણે આકૃતિ પુરી કરો.

સિદ્ધતા—

આકૃતિમાં ∵ $મ_1 = મ_2 = મ_3$.

∴ $મ_1 + મ_2 = મ_2 + મ_3$.

સમીકરણની બંને બાજુમાં **ન** આકૃતિ ઉમેરો.

∴ $મ_1 + મ_2 + ન = મ_2 + ન + મ_3$;

પરંતુ $મ_1 + મ_2 + ન = (અ + બ)(અ - બ)$;

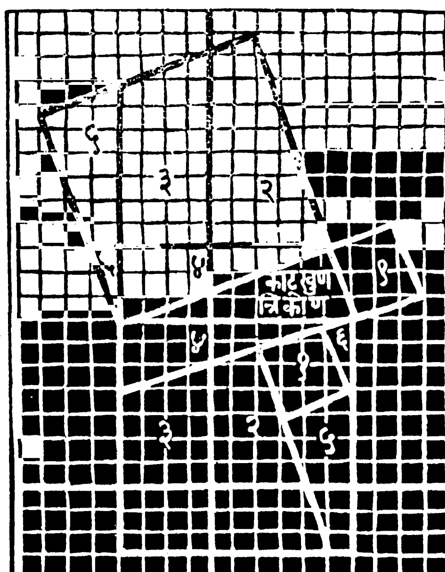
અને $મ_2 + ન + મ_3 = અ^2 - બ^2$.

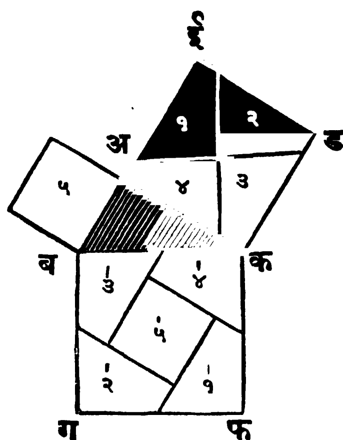
∴ $(અ^2 - બ^2) = (અ + બ)(અ - બ)$.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—જો એક સીધી લીટીને દુભાગીને ગમે તે બિંદુ સુધી લંબાવવામાં આવે, તો આ પ્રમાણે વધારેલી આખી લીટી અને વધારેલા ભાગથી થતો કાટખુણુ ચોખુણુ તથા દુભાગેલી લીટીના અર્ધ ઉપરનો ચોરસ, એ બે મળીને અડધી લીટી અને વધારેલો ભાગ એ બેની બનેલી લીટી ઉપરના ચોરસ બરોબર છે.

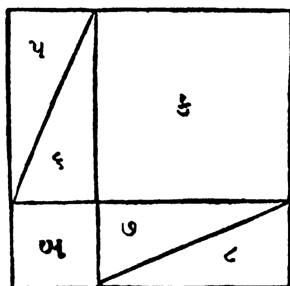
૪૪મા પ્રમેયની પ્રાયોગિક સિદ્ધતા.

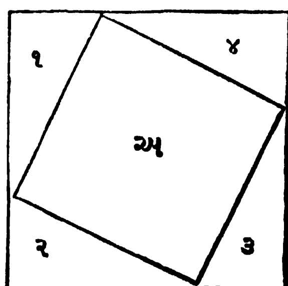
ચોરસ દોરેલા કાગળ પર ગમે તેવો એક કાટખુણુ ત્રિકોણ દોરો. તેની બાજુઓ પર ચોરસો કાઢો. કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓ પરના ચોરસોમાંના ચોરસ ખાનાંઓનો સરવાળો કરો, અને કર્ણ પરનાં ચોરસમાંનાં ચોરસ ખાનાંઓ સાથે તે સરવાળો સરખાવો.





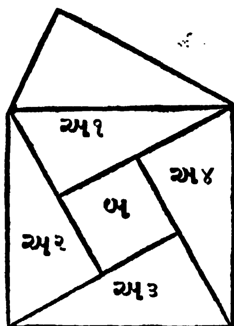
ગમે તેવો એક કાટખુણ ત્રિકોણ દોરો. કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પર ચોરસો કાઢો. ઉપર દોરેલી આકૃતિઓમાં બતાવ્યા પ્રમાણે આ ચોરસોના ભાગો કાપી કાઢો; અને તે ભાગોને કર્ણ પરના ચોરસમાં તેવાજ આંકડાઓથી બતાવેલા ભાગો પર ગોઠવો.

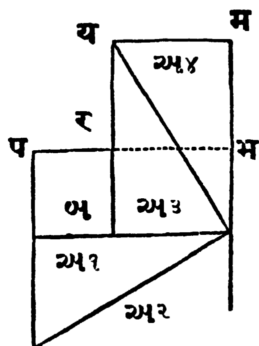




ઉપર દોરેલી બંને આકૃતિઓ સરખી છે, અને તેમાં ૧, ૨,૩,૪,૫,૬,૭,૮ એ આંકડાઓથી બતાવેલા ભાગો એકરૂપ છે. ડાબી તરફની આકૃતિમાંથી ૫,૬,૭,૮ એ ભાગો કાઢી લઈએ, તો બ ને ક ચોરસો રહે છે; અને જમણી બાજુ તરફની આકૃતિમાંથી તેવાજ ભાગો એટલે કે ૧,૨,૩,૪ એ

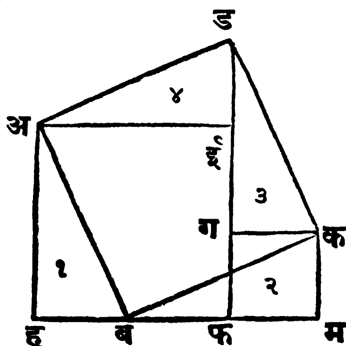
ભાગો કાઢી લઈએ, તો અ ચોરસ બાકી રહે છે. આ ચોરસો અનુક્રમે કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પરના અને કર્ણ પરના ચોરસો છે.





ઉપર આપેલી આકૃતિમાંના કર્ણ પરના ચોરસના ભાગો જમણી તરફની બીજી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવીએ, તો કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસો બની રહે છે.

अहब કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસો **हई** અને **कफ**માંથી ૧,૨ એ ભાગો (△ **अहब** અને △ **बमक**) કાઢી લઈએ, અને તેમને ૩ તથા ૪ એ આંકડાઓ-



વાળે ઠેકાણે ગોઠવીએ તો **अब** કર્ણ પરનો ચોરસ બની રહે છે.

ગમે તેવો એક કાટખુણ ત્રિકોણ દોરો. તેની ત્રણે બાજુઓ માપો. કર્ણનો વર્ગ કરો. બીજી બે બાજુઓનો વર્ગ કરી તેનો સરવાળો કરો. એ સરવાળાને કર્ણના વર્ગ સાથે સરખાવો. (પ્રુ૦).

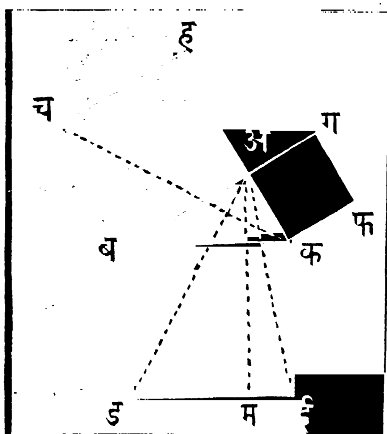
કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ પરનો ચોરસ, અને બીજી બે

બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો—એ બે વચ્ચેના સંબંધ વિષે ઉપલા પ્રયોગો ઉપરથી તમારા સમજવામાં શું આવે છે?

"કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ ઉપરનો ચોરસ કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે."

પ્રમેય ૪૪.

કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ ઉપરનો ચોરસ કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે.



પક્ષ—अबक ત્રિકોણનો अ ખુણો કાટખુણો છે. **बकईड, अकफग, अबचह** એ ત્રિકોણની બાજુઓ પર દોરેલા ચોરસો છે.

સાધ્ય—बक ઉપરનો ચોરસ=**अब** ઉપરનો ચોરસ + **कअ** ઉપરનો ચોરસ.

રચના—बडને સમાંતર **अम** દોરો, અને તેને **डई** લીટીને **म** બિંદુમાં મળવા દો. **चक** અને **अड** સાંધો.

સિદ્ધતા—∵ ∠**बअक**, ∠**बअह** એ દરેક કાટખુણો છે;

∴ **कअ,अह** એક સીધી લીટીમાં છે. (પ્ર૦ ૨).

તેજ પ્રમાણે बअ,अग એક સીધી લીટીમાં છે.

∠चबअ=∠कबड; (દરેક કાટખુણો)

એ દરેકમાં ∠अबक ઉમેરો.

∴ ∠चबक=∠अबड.

∵ चबक અને अबड ત્રિકોણોમાં—

चब=अब; (ચોરસની બાજુઓ)

कब=बड; („)

∠चबक=∠अबड;

∴ એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૦)

હવે, अच ચોરસ અને चबक ત્રિકોણ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ ઉંચાઈના છે;

∴ अच ચોરસ = २चबक ત્રિકોણ. (પ્ર૦ ૨૮).

તેજ પ્રમાણે □बम= २△ अबड. („)

અને ∵ △ चबक=△ अबड;

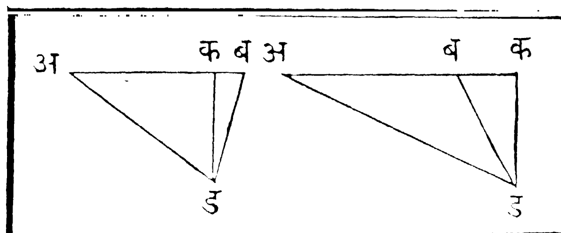
∴ अच ચોરસ = □बम.

એજ પ્રમાણે कग ચોરસ=□कम સિદ્ધ થશે.

∴ बई ચોરસ=अच ચોરસ+कग ચોરસ.

ઉપસિદ્ધાંત—अबમાં અથવા अबના લંબાવેલા ભાગમાં क એક બિંદુ હોય, અને क બિંદુમાંથી अब પર દોરેલા લંબમાં એક ड બિંદુ હોય; તો

अड²-बड²=अक²-बक².



૪૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેના કર્ણ ઉપરના ચોરસના ક્ષેત્રફળનું અર્ધું હોય છે.

૨. કાટખુણ ત્રિકોણમાં એક સાંકડો ખુણો બીજા સાંકડા ખુણા કરતાં બમણો હોય, તો પહેલા ખુણાની સામેની બાજુ પરનો ચોરસ નાના ખુણાની સામેની બાજુ પરના ચોરસ કરતાં ત્રણગણો હોય છે.

૩. કોઈ પણ કાટખુણ ચોખુણની બે પાસપાસેની બાજુઓ પરના ચોરસોના કર્ણોથી થતો કાટખુણ ચોખુણ પહેલા કાટખુણ ચોખુણથી બમણો હોય છે.

૪. કાટખુણો કરનારી કાટખુણ ત્રિકોણની બાજુઓ પરના ચોરસોના કર્ણોથી થતો કાટખુણ ચોખુણ તે ત્રિકોણથી ચારગણો હોય છે.

૫. **अबक** ત્રિકોણનાં **अ**,**ब**,**क** શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર અનુક્રમે **अड**, **बई**, **कफ** લંબો પડે છે; તો સિદ્ધ કરો કે

अई² + **बफ**² + **कड**² = **अफ**² + **बड**² + **कई**².

૬. **अबक** ત્રિકોણનો **अ** ખુણો કાટખુણો છે, અને તેની બાજુઓ પર **बकडई**, **कफगअ**, **अबचह** ચોરસો દોરેલા છે; તો સાબીત કરો કે

(૧) **फ**,**अ**,**च**, એક સીધી લીટીમાં છે.

(૨) **हअग**, **चबई**, **फकड**, **अबक** એ ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા છે.

(૩) **बह**, **कग**ને સમાંતર છે.

૭. **पचर** ત્રિકોણનો **च** ખુણો કાટખુણો છે, અને **चर**માં **स** ગમે તે એક બિંદુ લીધેલું છે; તો સિદ્ધ કરો કે

पस² + **चर**² = **पर**² + **चस**².

૮. **अबक** ત્રિકોણનો **अ** ખુણો કાટખુણો છે. **अक**, **अब**

બાજુઓમાં અનુક્રમે **य, क्ष** બિંદુઓ લીધેલાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बय**^{2}+**कक्ष**^{2}=**क्षय**^{2}+**बक**^{2}.

૯. **अबकड** કાટખુણુ ચોખુણુમાં **ओ** એક બિંદુ ગમે તે લીધું છે, તો સિદ્ધ કરો કે **ओअ**^{2}+**ओक**^{2}=**ओब**^{2}+**ओड**^{2}.

૧૦. કોઈ પણ કાટખુણુ ત્રિકોણુમાં કાટખુણો કરનારી બાજુઓમાંની એક બીજી કરતાં બમણી હોય, તો કર્ણ ઉપરનો ચોરસ બીજી બે બાજુઓમાંની નાની ઉપરના ચોરસ કરતાં પાંચગણો હોય છે.

૧૧. કાટખુણુ ત્રિકોણુની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી કર્ણ પર પડતા લંબથી કર્ણના જે બે ભાગ પડે, તે ભાગો પરના ચોરસોનો તફાવત બીજી બાજુ પરના ચોરસ બરોબર હોય છે.

૧૨. શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર પડતા લંબ વડે પાયાના જે બે ભાગ પડે છે, તે ભાગો પરના ચોરસોનો તફાવત બે બાજુઓ પરના ચોરસોના તફાવત બરોબર હોય છે.

૧૩. **अबक** ત્રિકોણુમાં ∠**अ**=∠**क** = $\frac{1}{2}$કાટખુણો છે. **अब** ને **ब** તરફ લંબાવી છે અને તેના પર **क** બિંદુમાંથી **कड** લંબ દોરેલો છે; તો બતાવી આપો કે **अब**^{2}=૨**बड**^{2}.

૧૪. **अबक** ત્રિકોણુનો **ब** ખુણો કાટખુણો છે. **अब**=૩", અને **बक**=૪" છે. **अक** પર **कई** લંબ દોર્યો છે અને તે **बक**થી ત્રણગણો છે; તો **अई**ની લંબાઈ શોધી કાઢો.

૧૫. બે આપેલા ચોરસોના સરવાળા બરોબરનો એક ચોરસ દોરો.

૧૬. આપેલા બે ચોરસોના તફાવત બરોબરનો એક ચોરસ દોરો.

૧૭. આપેલા ત્રણ ચોરસોના સરવાળા બરોબરનો એક ચોરસ દોરો.

૧૮. આપેલા ચોરસથી ચારગણો એક ચોરસ દોરો.

૧૯. એક ઇંચની લીટીની મદદથી $\sqrt{૨}$, $\sqrt{૩}$, $\sqrt{૫}$ ઇંચ લંબાઇની લીટીઓ કાઢો.

૨૦. એક લીટીના એવા બે ભાગ કરો કે તે બે ભાગો પરના ચોરસોનો સરવાળો આપેલા ચોરસ બરોબર હોય. (આવું હંમેશ બની શકે ?)

૨૧. **अबकड** ચોરસની **अड** બાજુ લંબાવેલી છે. **अक** કર્ણને લંબાવી તે લંબાવેલા ભાગમાં એક એવું બિંદુ લો, કે તે બિંદુમાંથી **अब**ને સમાંતર દોરેલી લીટીથી (**अड** સાથે) થતો કાટખુણ ત્રિકોણ આપેલા ચોરસ બરોબર થાય.

૨૨. એક લીટીના એવા બે ભાગ કરો કે એક ભાગ પરનો ચોરસ બીજા ભાગ પરના ચોરસ કરતાં બમણો થાય.

૨૩. કાટખુણ ત્રિકોણમાં એક સાંકડા ખુણાવાળા શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુને દુભાગનાર એક મધ્યગા દોરી છે; તો બતાવી આપો કે આ બાજુના અર્ધ પરના ચોરસની તમણાઈ તથા મધ્યગા પરનો ચોરસ એ બે મળીને કર્ણ પરના ચોરસની બરોબર છે.

૨૪. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણની **अब** બાજુ **ड** સુધી લંબાવી છે, અને **बड**ને **अब**થી બમણી રાખી છે; તો બતાવી આપો કે **कड**^{2}= ૭**अब**^{2}.

૨૫. ત્રિકોણની બે બાજુઓ પરના ચોરસોનો તફાવત, તે બે બાજુઓ વચ્ચેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ તથા પાયાનું મધ્યબિંદુ એ બે વચ્ચેનો ભાગ અને પાયો, એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણ કરતાં બમણો હોય છે.

૨૬. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને, પાયાને લંબાવી તેમાં લીધેલા એક બિંદુ સાથે સાંધવામાં આવે, તો સાંધનારી લીટી તથા ત્રિકોણની એક બાજુ પરના ચોરસોનો તફાવત બહાર લીધેલા બિંદુથી પડતા પાયાના બે ભાગોથી

થતા કાટખુણ ચોખુણ બરોબર હોય છે.

૨૭. કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાવાળા શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબ ઉપરનો ચોરસ, કર્ણના બે ભાગોથી થતા કાટખુણ ચોખુણ બરોબર હોય છે.

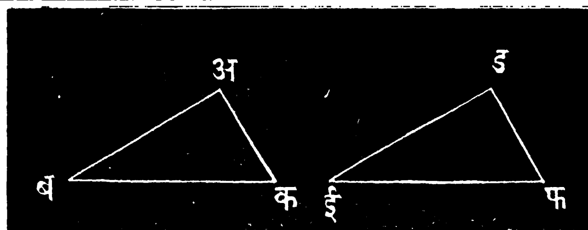
૨૮. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના ગમે તે કોઈ બિંદુ સુધી લીટી દોરવામાં આવે, તો તે લીટી પરનો ચોરસ તથા એક બાજુ પરનો ચોરસ એ બેનો તફાવત પાયાના બે ભાગોથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બરોબર હોય છે.

૨૯. **अबक** ત્રિકોણનો **अ** ખુણો કાટખુણો છે, અને **बई**, **कफ** એ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ છે; તો સિદ્ધ કરો કે ૪ (**बई**^{2} + **कफ**^{2})=૫**बक**^{2}.

૩૦. સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો તેમના કર્ણો ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે.

પ્રમેય ૪૫.

કોઈ ત્રિકોણમાં એક બાજુ પરનો ચોરસ બીજી બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય, તો તે બે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો કાટખુણો હોય છે.



પક્ષ—△**अबक**માં **बक**^{2}=**अक**^{2}+**अब**^{2}.

સાધ્ય—$\angle$ अ કાટખુણો છે.

રચના—એક **डईफ** ત્રિકોણ એવો દોરો, કે તેનો **ड** ખુણો કાટખુણો હોય, અને **डई**, **अब** બરોબર, અને **डफ**, **अक** બરોબર હોય.

સિદ્ધતા—∵ अब=डई અને अक=डफ; (રચના)

∴ $डई^2+डफ^2=अब^2+अक^2$.

પરંતુ ∵ $\angle$ ड કાટખુણો છે;

∴ $डई^2+डफ^2=ईफ^2$. (પ્ર૦ ૪૪)

અને $अब^2+अक^2=बक^2$; (પક્ષ)

∴ $बक^2=ईफ^2$.

∴ बक=ईफ.

હવે, ∵ अबक, डईफ ત્રિકોણોમાં—

अब=डई, (રચના)

अक=डफ,

बक=ईफ,

∴ એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

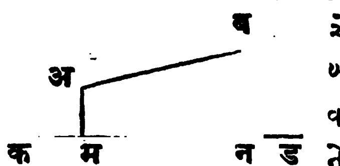
∴ $\angle$ अ=એક કાટખુણો. (પ્ર૦ ૧૪)

૪૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

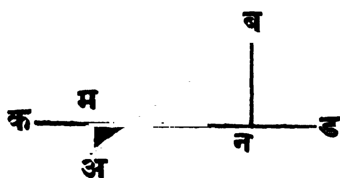
૧. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **ब** ખુણો કાટખુણો છે, અને $अड^2=अब^2+बक^2+कड^2$; તો સિદ્ધ કરો કે **अकड** ખુણો કાટખુણો છે.

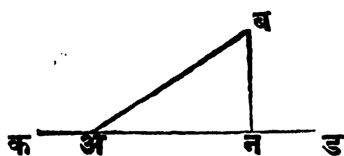
૨. કોઈ ત્રિકોણમાં (૧) જો એક બાજુ પરનો ચોરસ બીજી બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં મોટો હોય, તો તે બે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો પહોળો ખુણો હોય છે, અને (૨) જો એક બાજુ પરનો ચોરસ બીજી બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં નાનો હોય, તો બે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો સાંકડો હોય છે.

વ્યાખ્યા.—



એક લીટીના છેડાઓમાંથી બીજી લીટી પર લંબો દોરવામાં આવે, ત્યારે બીજી લીટીનો જે ભાગ લંબોની વચમાં આવતો હોય, તેને પહેલી લીટીની બીજી પરની છાયા કહે છે. બાજુ પરની આકૃતિઓમાં मन એ अब લીટીની कड પરની છાયા છે.

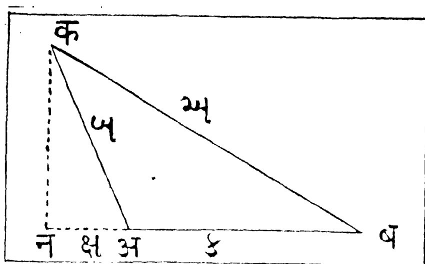




આ આકૃતિમાં अन એ अबની कड પરની છાયા છે.

પ્રમેય ૪૬.

પહોળખુણ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ પરનો ચોરસ પહોળો ખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં એ બે બાજુઓમાંની એક અને તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈ જેટલો મોટો હોય છે.



પક્ષ—**अबक** પહોળખુણ ત્રિકોણ છે, ને તેનો **अ** ખુણો પહોળો ખુણો છે. **बअ** બાજુ લંબાવીને તેના પર **क** બિંદુમાંથી **कन** લંબ દોર્યો છે; અર્થાત્ **अन** એ **अब** પરની **कअ**ની છાયા છે. (**बक, कअ, अब, अन** એ લંબાઈઓ અનુક્રમે અ, બ, ક, અને ક્ષ એકમો છે એમ ધારી લો).

સાધ્ય—અ^2=બ^2+ક^2+ ૨ કક્ષ.

સિદ્ધતા—$\because$ $\angle$**न** એ કાટખુણો છે.

$\therefore$ અ^2= कन^2+ नब^2. (પ્ર૦ ૪૪)

$\because$ नब= (ક્ષ + ક);

$\therefore$ અ^2= कन^2+ (ક્ષ+ક)^2.

પણ (ક્ષ+ક)^2= ક્ષ^2+ક^2+૨ ક્ષક. (પ્ર૦ ब)

$\therefore$ અ^2=कन^2+ ક્ષ^2+ ક^2+ ૨ક્ષક.

પરંતુ $\because$ $\angle$कनअ એ કાટખુણો છે;

$\therefore$ कन^2 + ક્ષ^2= બ^2.

$\therefore$ અ^2= બ^2+ ક^2+ ૨કક્ષ.

ઉપસિદ્ધાંત—**પહોળખુણ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની એક બાજુ તથા તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી થતો કાટખુણ ચોખુણ, પહોળા ખુણાની બીજી બાજુ અને તેના પરની પહેલી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બરોબર હોય છે.**

૪૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

(૧) **अबक** ત્રિકોણની **अब**=૬"; **बक**=૧૦"; **कअ**= ૧૪". **अब**ને લંબાવી તેના પર **क**માંથી **कड** લંબ દોર્યો છે, અને **कब**ને લંબાવી તેના પર **अ**માંથી લંબ દોર્યો છે તે તેને **ई**માં મળે છે; તો **अड** અને **कई**ની લંબાઈ શોધી કાઢો.

૨. સમબાજુ ત્રિકોણ **अबक**ની **बक** બાજુને **ड** સુધી લંબાવી **अ,ड** સાંધ્યાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે

$$\text{अड}^2 = \text{बक}^2 + \text{कड}^2 + \text{बक}\cdot\text{कड}.$$

૩. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ **अबक**નો **अ** ખુણો કાટખુણો છે. **कब**ને લંબાવી તેમાં એક **ड** બિંદુ લીધું છે. હવે જો **अड**^{2}= **डब**^{2} + ૩**बअ**^{2} હોય, તો સિદ્ધ કરો કે **डब**=**बक**.

૪. એક ત્રિકોણની બાજુઓ અનુક્રમે ૩,૫,૭ છે, તો તે ત્રિકોણનો મોટામાં મોટો ખુણો કેવડો છે તે કાઢો.

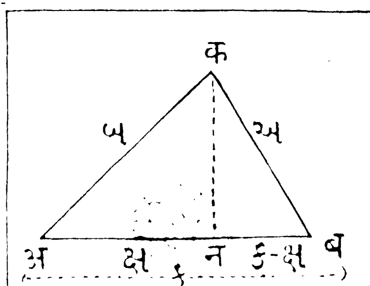
૫. **अबक** એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. **बक** પાયાને સમાંતર દોરેલી એક લીટી સરખી બાજુઓ **अब**, **अक**ને **ड** અને **ई**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बई**^{2}= **कई**^{2} + **बक**·**डई**.

૬. **पचर** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની **पच**, **पर** બાજુઓ સરખી છે. જો **पर** બાજુને **स** સુધી લંબાવી **रस**ને **पर** બરોબર કરવામાં આવે, તો **चस**^{2}= **रच**^{2}+ **पर**^{2}.

૭. **पदर** ત્રિકોણનો **प** એ પહોળો ખુણો છે, અને **दस**, **रट** લંબાવેલી **रप**,**दप** પર અનુક્રમે પડતા લંબો છે; તો સિદ્ધ કરો કે **दर**^{2}=**पद**.**दट**+**पर**.**रस**.

પ્રમેય ૪૭.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં સાંકડા ખુણાની સામેની બાજુ પરનો ચોરસ, સાંકડો ખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં, આ બે બાજુઓ-માંની એક અને તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈ જેટલો ઓછો હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ત્રિકોણ છે. ધારો કે તેની મોટામાં મોટી બાજુ (દાખલા તરીકે **अब**) તેનો પાયો છે. શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દોરો. ધારો કે **क** શિરોબિંદુમાંથી **अब** પર **कन** લંબ દોર્યો. ત્યારે તો **अन** એ **अक**ની **अब** પરની છાયા થઈ. (**बक, कअ, अब, अन** એ લંબાઈઓને અનુક્રમે અ, બ, ક, ક્ષ નામ આપો).

સાધ્ય—$અ^2 = બ^2 + ક^2 - ૨કક્ષ$.

સિદ્ધતા— $\because$ ∠कनब=કાટખુણો; (રચના)

$\therefore અ^2 = कन^2 + नब^2$.

પરંતુ $\because$ नब=(ક−ક્ષ);

$\therefore नब^2 = (ક - ક્ષ)^2$.

$\therefore અ^2 = कन^2 + (ક - ક્ષ)^2$.

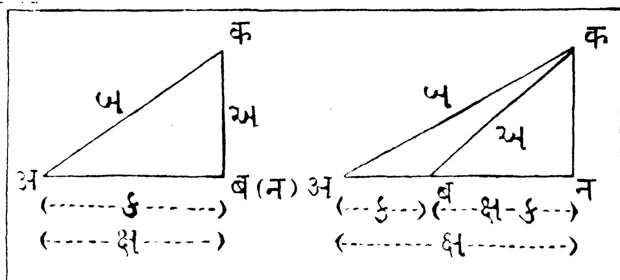
પણ $(ક - ક્ષ)^2 = ક^2 + ક્ષ^2 - ૨કક્ષ$; (પ્રમેય **क**)

$\therefore અ^2 = कन^2 + ક્ષ^2 + ક^2 - ૨કક્ષ$.

પરંતુ $\because$ ∠कनअ=કાટખુણો;

$\therefore कन^2 + ક્ષ^2 = બ^2$;

$\therefore અ^2 = બ^2 + ક^2 - ૨કક્ષ$.



(પક્ષમાં જણાવ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણની મોટામાં મોટી બાજુ તરીકે પાયાને ન ગણીએ તો એ બીજી આકૃતિઓ નીકળશે, તે ઉપર કાઢી બતાવી છે).

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણમાં, સાંકડો ખુણો કરનારી બાજુઓમાંની એક તથા તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી બનતો કાટખુણ ચોખુણ તેજ ખુણાની બીજી બાજુ અને તેના પરની પહેલી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બરોબર છે.

૪૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણની **बक** બાજુને **ड** સુધી લંબાવીને **अड** સાંધવામાં આવે તો **अड**^{2}=**बक**^{2}+**बड**^{2}−**बक**. **बड**.

૨. સમલંબ ચોખુણના કર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો, અસમાંતર (તિર્યક્) બાજુઓ ઉપરના ચોરસો તથા સમાંતર બાજુઓથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈ એમના સરવાળાની બરોબર હોય છે.

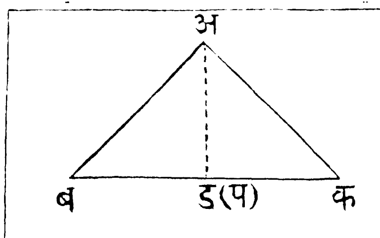
૩. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો ચારે બાજુઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે.

૪. ચતુષ્કોણના કર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો તેની સામસામેની બાજુઓના મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ પરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો હોય છે.

૫. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब**^{2}+**बक**. **कअ**=**बक**^{2}+**कअ**^{2} છે; તો સિદ્ધ કરો કે ∠**क**=૬૦°.

પ્રમેય ૪૮.

કોઇ પણ ત્રિકોણમાં, બે બાજુઓ પરના ચોરસો-નો સરવાળો, ત્રીજી બાજુના અર્ધ પરના તથા તે બે બાજુઓ વચ્ચેની મધ્યગા પરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ગમે તેવો ત્રિકોણ છે. अड મધ્યગા છે, તે बकને डમાં દુભાગે છે.

સાધ્ય—$\text{अब}^2+\text{अक}^2=२\text{बड}^2+२\text{अड}^2$.

સિદ્ધતા—अमांथी बक પર अप લંબ દોરો.

(૧) લંબ અને મધ્યગા જો એકજ હોય, અર્થાત્ ∠अडब અને ∠अडक એ દરેક કાટખુણો હોય, તો

∵ ∠अपब અને ∠अपक એ દરેક કાટખુણો છે;

∴ $\text{अब}^2=\text{अप}^2+\text{पब}^2$; (પ્ર૦ ૪૪)

અને $\text{अक}^2=\text{अप}^2+\text{पक}^2$, (,,)

∴ $\text{अब}^2+\text{अक}^2=२\text{अप}^2+\text{पब}^2+\text{पक}^2$.

પરંતુ पब=पक; ∴ $\text{पब}^2+\text{पक}^2=२\text{पब}^2$;

∴ $\text{अब}^2+\text{अक}^2=२\text{अप}^2+२\text{पब}^2$.

પણ प, ड પર પડે છે, અથવા अप, अड એકજ છે;

∴ $\text{अब}^2+\text{अक}^2=२\text{अड}^2+२\text{डब}^2$.

(૨) પણ જો अड, बक પર લંબ નહિ હોય, તો $\angle$अडब અને $\angle$अडक એ તિર્યક્ ખુણાઓ હોવા જોઈએ. આમાંથી ધારો કે अडब ખુણો પહોળો ખુણો છે.

डक પર अप લંબ દોરો. अप લંબ बक પાયાને અંદરથી છેદશે અથવા લંબાવવાથી તેના વધારેલા ભાગમાં છેદશે. (આકૃતિ ૨ તથા ૩ જુઓ).

બંને આકૃતિઓમાં ∵ $\angle$अडब=પહોળો ખુણો;

∴ $अब^2=बड^2+अड^2+२$ बड·डप. (પ્ર० ૪૬)

અને ∵ $\angle$अडक=સાંકડો ખુણો;

∴ $अक^2=कड^2+अड^2-२$कड·डप. (પ્ર० ૪૭)

પણ ∵ कड=बड; ∴ $कड^2=बड^2$ અને २कड·डप = २ बड · डप.

∴ $अक^2=बड^2+अड^2-$ २बड · डप.

અને $अब^2=बड^2+अड^2+$ २बड · डप;

∴ $अब^2+अक^2=२\ बड^2+२\ अड^2$.

ઉપસિદ્ધાંત—જો अ શિરોબિંદુ बकની પાસે ને પાસે જતાં बकમાં અથવા તેના લંબાવેલા ભાગમાં પડે, તો નીચેનો પ્રમેય ઉપજશે:–

જો એક સીધી લીટીના બે સરખા અને બે વિષમ ભાગ (અંદરના અથવા બહારના બિંદુમાં*) કરવામાં આવે, તો વિષમ ભાગો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો, અરધી લીટી ઉપરના તથા છેદનબિંદુઓની વચ્ચેની લીટી પરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો થાય છે.

* ધારો કે बकના લંબાવેલા ભાગમાં अ બિંદુ છે. આવા પ્રસંગમાં बक લીટીના બહારના બિંદુમાં બે ભાગ પડ્યા છે એમ કહેવાય. પડેલા બે ભાગો बअ અને अक છે.

ब   ड   अ   क   ब   ड   क   अ

(अब² + अक²) = २(बड² + डअ²).

૪૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને **ग** માં છેદે છે અને એ ચતુષ્કોણની અંદર ગમે તે એક **प** બિંદુ લીધું છે; તો સાબીત કરો કે

पअ² + पब² + पक² + पड² = अब² + बक² + ४ पग².

૨. ત્રિકોણની બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળાનું ત્રણગણું મધ્યગાઓ પરના ચોરસોના સરવાળાના ચારગણા બરોબર હોય છે.

૩. જો **अबक** ત્રિકોણનું **ग** ગુરુત્વમધ્યબિંદુ (મધ્યગાઓનું છેદનબિંદુ) હોય, તો સાબીત કરો કે
3 (**गअ² + गब² + गक²**) = **अब² + बक² + कअ².**

૪. કોઈ પણ ચતુષ્કોણની બાજુઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો, તેના કર્ણો ઉપરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં કર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટી પરના ચોરસના ચારગણા જેટલો વધારે હોય છે.

૫. જો કોઈ ચતુષ્કોણની ચારે બાજુ પરના ચોરસોનો સરવાળો તેના કર્ણો ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ હોય છે.

૬. **अबक** ત્રિકોણનું **ग** ગુરુત્વમધ્યબિંદુ છે, અને **ड** એ **अग**નું મધ્યબિંદુ છે; તો **डब² + डक² = अब² + अक² − १०अड².**

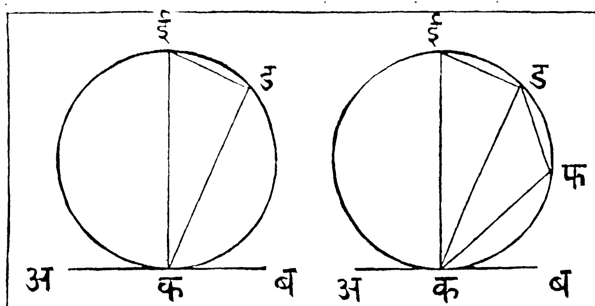
૭. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના **अक** ને **बड** કર્ણો છે. **प** એક એવું બિંદુ છે કે **पअ² + पक² = पब² + पड²** છે; તો સાબીત કરો કે **अबकड** એ કાટખુણ ચોખુણ છે.

૮. એક વર્તુળમાં **કડ** જ્યા **અબ** વ્યાસને સમાંતર છે. **પ** એ અબમાં લીધેલું ગમે તે બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **અપ**^{2}+ **બપ**^{2}= **કપ**^{2}+ **ડપ**^{2}.

(હવે પછીનો પ્રમેય ક્ષેત્રફળ સંબંધી નથી, પણ ક્રમમાં અહીં આવતો હોવાથી આ પ્રકરણમાં દાખલ કરવામાં આવ્યો છે.)

પ્રમેય ૪૯.

વર્તુળની સ્પર્શલીટીના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી કોઈ પણ જ્યા સ્પર્શલીટી સાથે જે ખુણા કરે છે, તે દરેક, વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંના ખુણા બરોબર હોય છે.



પક્ષ—**કઈડ** આપેલું વર્તુળ છે. **અકબ** વર્તુળની સ્પર્શલીટી છે. **કડ** એ સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી જ્યા છે.

સાધ્ય—(૧) ∠**બકડ**=વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંનો ∠**કઈડ**.

(૨) ∠**અકડ**=વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંનો ∠**કફડ**.

સિદ્ધતા—

પ્રકાર ૧—ધારો કે **બકડ** સાંકડો ખુણો છે (આકૃતિ ૧ જુઓ).

રચના—**ક** સ્પર્શબિંદુમાંથી **કઈ** લંબ દોરો. ધારો કે તે પરિધને **ઈ** બિંદુમાં મળે છે.

∵ **अकब** સ્પર્શલીટી છે, અને **कई** સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ છે;

∴ **कई** એ વ્યાસ છે. (પ્ર૦ ૩૬. ઉ૦ ૨)

∵ **कईड** એ અર્ધવર્તુળ છે;

∴ ∠**कडई** એ કાટખુણો છે. (પ્ર૦ ૪૦)

∵ **कईड** ત્રિકોણમાં, ∠**कडई**=૧કાટખુણો;

∴ ∠**कईड**+ ∠**डकई**=૧કાટખુણો. (પ્ર૦ ૮)

હવે, ∵ ∠**बकड**+ ∠**डकई**=૧કાટખુણો; (રચના)

∴ ∠**बकड** + ∠**डकई**=∠**कईड** + ∠**डकई**.

આ સમીકરણમાંથી સામાન્ય ખુણો **डकई** કાઢી લઈએ, તો બાકીનો ∠**बकड**= ∠**कईड**.

પ્રકાર ૨—ધારો કે ∠**अकड** પહોળો ખુણો છે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

રચના—**कईड** કૌંસમાં એક **ई** બિંદુ લો, અને **कफड** કૌંસમાં **फ** બિંદુ લો. **ईक**, , **कफ**, **डफ** સાંધો.

∵ **कफडई** એ **कफडई** વર્તુળમાં દોરેલો ચતુષ્કોણ છે;

∴ ∠**कईड**+∠**कफड**=૨ કાટખુણા. (પ્ર૦ ૩૨)

પરંતુ ∠**बकड**+∠**अकड**=૨ કાટખુણા. (પ્ર૦ ૧)

∴ ∠**बकड**+∠**अकड**=∠**कईड**+∠**कफड**.

પણ ∠**बकड**=∠**कईड**; (પ્ર૦ ૪૯ પ્રકાર ૧)

∴ ઉપલા સમીકરણમાંથી એ બંને સમાન વસ્તુઓ બાદ કરતાં બાકીનો ∠**अकड**=∠**कफड**.

૪૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળખંડના કૌંસના મધ્યબિંદુમાંથી દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી તે વર્તુળખંડની જ્યાને સમાંતર હોય છે.

૨. વર્તુળખંડની જ્યાને સમાંતર દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી વર્તુળખંડના કૌંસને સ્પર્શબિંદુમાં દુભાગે છે.

૩. એક બહારના બિંદુ **અ**માંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી **અબ**, **અક** લીટીઓ દોરેલી છે. **ડ** એ વર્તુળ પર આવેલું **અબક** ત્રિકોણની બહારનું બિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે **અબડ** તથા **અકડ** ખુણાઓનો સરવાળો નિત્ય* છે.

૪. એક બહારના બિંદુ **અ**માંથી દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી **અપ**, **અદ** લીટીઓ છે. **બ** એ **પદ** કૌંસનું મધ્યબિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે **પબ** લીટી **અપદ** ખુણાને દુભાગે છે.

૫. **અબ** એક વર્તુળની જ્યા છે; તો બતાવી આપો કે **અ** બિંદુમાંથી દોરેલો વ્યાસ અને **બ** બિંદુમાંથી દોરેલી સ્પર્શ-લીટી પર **અ** બિંદુમાંથી દોરેલો લંબ એ બંનેની વચમાંના ખુણાને **અબ** જ્યા દુભાગે છે.

૬. પ્રમેય ૪૯ માનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૭. વર્તુળનો **બઅ** વ્યાસ **પ** સુધી લંબાવેલો છે, અને **અપ**ને વર્તુળની ત્રિજ્યા બરોબર કરી છે. **અ** અને **પ**માંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી **અડ** ને **પક** લીટીઓ દોરેલી છે, તે એક બીજીને **ઈ**માં છેદે છે. **બક** સાંધો અને **ડ**માં **અઈ**ને મળે ત્યાં સુધી લંબાવો, ને બતાવી આપો કે **ડઈક** એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

૮. એક વર્તુળની **અબ** જ્યા છે, અને **અડ** સ્પર્શલીટી છે. **અડ**માંના એક **ડ** બિંદુમાંથી **અબ**ને સમાંતર એક એવી લીટી દોરી છે કે તે વર્તુળને **પ** અને **સ** બિંદુમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે **અપડ** ને **અબસ** ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૯. જો **અબ** કૌંસનું **મ** એ મધ્યબિંદુ હોય, તો બતાવી આપો કે **અબ** પર અને **અ** બિંદુમાંથી જનારી સ્પર્શલીટી પર **મ**માંથી દોરેલા લંબો બરાબર છે.

---

* નિત્ય=કદી નહિ બદલાતો, અર્થાત્ એકજ મહત્ત્વવાળો.

૧૦. બે વર્તુળો એક બીજાને (અંદરથી અથવા બહારથી) સ્પર્શ કરે છે, અને તેમના સ્પર્શબિંદુમાંથી બે લીટીઓ બંને વર્તુળોને છેદે એવી રીતે દોરેલી છે; તો એક વર્તુળનાં છેદન-બિંદુઓને જોડનારી લીટી બીજા વર્તુળનાં છેદનબિંદુઓને જોડનારી લીટીને સમાંતર છે એમ સાબીત કરો.

૧૧. જો બે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરતાં હોય, તો બતાવી આપો કે સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી કોઈ પણ લીટી સરૂપ* વર્તુળખંડો કાપી કાઢે છે.

૧૨. બે વર્તુળો એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરે છે, અને મોટા વર્તુળની એક જ્યા અંદરના વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી છે; તો તે લીટીના સ્પર્શબિંદુ આગળ જે બે ભાગ પડે છે તે ભાગો વર્તુળના સ્પર્શબિંદુ સાથે સરખા ખુણાઓ કરે છે.

૧૩. એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરનાર વર્તુળોને છેદ-નારી એક લીટી દોરવામાં આવે, તો તે બે વર્તુળોની વચ્ચે આવેલા તે લીટીના ગાળાઓ વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુ સાથે સરખા ખુણાઓ કરે છે.

૧૪. બે વર્તુળો એક બીજાને છેદે છે, અને તેમાંનું એક બીજા વર્તુળના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થાય છે; તો સિદ્ધ કરો કે એક છેદનબિંદુ આગળ એમાંના એક વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી તથા સામાન્ય જ્યા એ બે વચ્ચેનો ખુણો, તે છેદનબિંદુને બીજા વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી વડે દુભાગાય છે.

૧૫. જો બે વર્તુળો એક બીજાને છેદતાં હોય, તો સામાન્ય સ્પર્શલીટી છેદનબિંદુઓ સાથે જે ખુણા કરે છે તે ન્યૂનતાપૂરક છે.

૧૬. એક બીજાને છેદનારાં બે વર્તુળોની બે સામાન્ય સ્પર્શલીટીઓ એક છેદનબિંદુ સાથે જે ખુણાઓ કરે છે તે ન્યૂનતાપૂરક છે.

* જેમાંના ખુણાઓ સરખા હોય તેમને સરૂપ વર્તુળખંડો કહે છે.

૧૭. બે વર્તુળો એક બીજાને **अ** તથા **ब**માં છેદે છે. **ब** આગળ એક વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી બીજા વર્તુળના પરિધને **ड**માં છેદે છે. **अ**માંથી બંને વર્તુળોને અનુક્રમે **ग** અને **ह**માં છેદનારી એક લીટી દોરવામાં આવી છે; તો સાબીત કરો કે **बग** અને **डह** એક બીજીને સમાંતર છે.

૧૮. બે વર્તુળો એક બીજાને **प** તથા **घ**માં છેદે છે. **मपन** લીટી વર્તુળોને **म** તથા **न**માં છેદે છે. **म** અને **न**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ **ट**માં એક બીજીને મળે છે; તો બતાવી આપો કે **म,घ,न,ट** બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૧૯. **अबकट** એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે, અને તેના કર્ણો એક બીજાને **ई**માં છેદે છે. **अ,ब,**ને **ई**માં થઈને પસાર થનારૂં એક વર્તુળ દોર્યું છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ई** આગળ વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી **कड**ને સમાંતર છે.

૨૦. **अब** અને **अक** લીટીઓ **ब** ને **क** આગળ વર્તુળ-ને સ્પર્શ કરે છે. જો **ड** એ **बक** કૌંસનું મધ્યબિંદુ હોય, તો સાબીત કરો કે **ड** એ **अबक** ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૨૧. **अकब** ત્રિકોણમાં **ब** ખુણો **अ** ખુણા કરતાં મોટો છે. **अकब** ખુણાને દુભાગનારી **कई** લીટી **अब**ને **ई**માં મળે છે. **अब** લંબાવીને તેમાં **ड** બિંદુ એવું લીધું છે કે $\angle$**ईकड** $=\angle$**कईड** છે; તો સિદ્ધ કરો કે **कड** લીટી **अबक** ત્રિકોણ-ની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૨૨. **अब** લીટીનાં **क,ड** બિંદુઓમાં ત્રણ સરખા ભાગ કર્યા છે. **कड** પર **पकड** એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો સાબીત કરો કે **ब,क,प**માંથી પસાર થતા વર્તુળને **अप** સ્પર્શ કરે છે.

૨૩. **अब, अक** એક વર્તુળની જ્યાઓ છે. **अ** આગળ સ્પર્શ કરનારી લીટીને સમાંતર **बड** દોરી છે, ને તે **अक**ને

ડમાં મળે છે; તો સાબીત કરો કે $\angle$**અબડ** અને $\angle$**બકડ** સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે, અને **બ,ક,ડ**માંથી પસાર થતા વર્તુળને **અબ** લીટી **બ**માં સ્પર્શ કરે છે.

૨૪. **અબ** એક વર્તુળની જ્યા છે. **બ** આગળ એક સ્પર્શ-લીટી દોરી છે, અને તેના પર **અ**માંથી લંબ દોર્યો છે. **બ** આગળ **અબ** પર પણ એક લંબ દોર્યો છે. આ બે લંબો એક બીજાને **ક**માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે **અક** વર્તુળના વ્યાસ બરોબર છે.

૨૫. એક વર્તુળને **પ** આગળ સ્પર્શ કરનારી લીટી બીજા વર્તુળની **દર** જ્યાને સમાંતર છે. **પદ**, **પર** પહેલા વર્તુળને **સ,ટ**માં અને બીજા વર્તુળને **મ,ન**માં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે **સટ** અને **મન** સમાંતર છે.

૨૬. **મ** એ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **મઅ**, **મબ** ત્રિજ્યાઓ એક બીજી સાથે કાટખુણો કરે છે. **મઅ**ને લંબાવી છે અને તેને **દ**માંથી દોરેલી એક **બપ** જ્યા **ન**માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે **બઅ** એ **અનપ** ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૨૭. **અબ** કૌંસના **પ**માં એવા બે ભાગ પડે છે કે **અપ** કૌંસ **પબ** કૌંસથી બમણો છે. **અ**માંથી **અબ** પર **અદ** લંબ દોર્યો છે. **પ**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટી આ લંબને તથા લંબાવેલી **અબ**ને **દ** તથા **ર**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **દપ** = **પર**.

૨૮. એક વર્તુળની **અબ**, **અડ** જ્યાઓ બીજા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે, અને તે બીજા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **ક** પહેલા વર્તુળના પરિધ પર છે; તો બતાવી આપો કે **ક** આગળની સ્પર્શલીટી **બડ**ને સમાંતર છે.

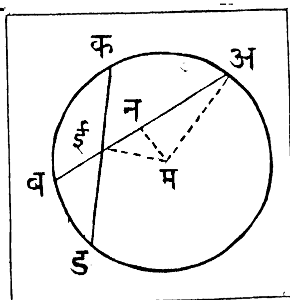
૨૯. બે વર્તુળો એક બીજાને **મ** આગળ અંદરથી સ્પર્શ કરે છે. **અબકડ** જ્યા બહારના વર્તુળને **અ** તથા **ડ**માં

અને અંદરના વર્તુળને **ब** તથા **क**માં છેદે છે. **मअ**, **मड** અંદરના વર્તુળને **य**,**र**માં છેદે છે, અને **मब**, **मक**ને લંબાવવાથી તેઓ બહારના વર્તુળને **ल**,**व**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **यर** લીટી **लव**ને સમાંતર છે.

૩૦. બે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે. **अडबक** લીટી એક વર્તુળને **अ** અને **ड**માં અને બીજાને **ब** તથા **क**માં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે **अब** અને **डक** લીટીઓ બંને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુ સાથે જે ખુણાઓ કરે છે તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

પ્રમેય ૫૦.

જો એક વર્તુળની બે જ્યાઓ એક બીજીને વર્તુળની અંદર અથવા વર્તુળની બહાર છેદતી હોય, તો એક જ્યાના પડેલા બે ભાગોથી થતો કાટખુણ ચોખુણ બીજીના બે ભાગોથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બરોબર છે.



પક્ષ—**अब**,**कड** એક વર્તુળની જ્યાઓ છે. તે એક બીજીને **ई**માં છેદે છે. (આ બિંદુ **ई** વર્તુળની અંદર હોય અથવા બહાર પણ હોય).

સાધ્ય—**अई**·**ईब**=**कई**·**ईड**.

રચના—**म** મધ્યબિંદુમાંથી **अब** પર લંબ દોરો; અને તે **अब**ને **न**માં મળે છે એમ ધારો. **मई**, **मअ** સાંધો.

સિદ્ધતા—(૧) ધારો કે **ई** વર્તુળની અંદર છે.

$\because$ **मन** એ **अब** પર લંબ છે;

$\therefore$ **नअ** = **नब**. (પ્ર૦ ૩૧).

∵ अई = अन + नई,

અને ईब = नब−नई = अन−नई;

∴ अई·ईब=(अन+नई) (अन−नई).

∵ (अन+नई) (अन−नई)=अन^2−नई^2; (પ્ર૦ ૬);

∴ अई · ईब=अन^2−नई^2.

अन^2માં मन^2 ઉમેરો અને नई^2માંથી मन^2 બાદ કરો. આમ કરવાથી ઉપલા સમીકરણની જમણી બાજુની કિંમતમાં ફેર પડશે નહિ.

अई·ईब=अन^2+ मन^2− नई^2−मन^2;

∴ अई·ईब=(अन^2+मन^2)−(नई^2+ मन^2).

∵ ∠अनम = કાટખુણો;

∴ अन^2 + मन^2 = अम^2, તેમજ नई^2+ मन^2= मई^2;

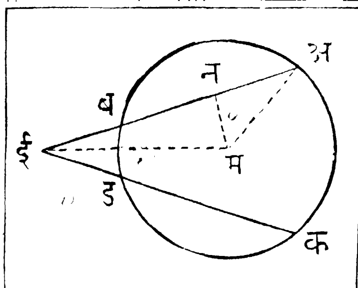
∴ अई·ईब=अम^2−मई^2;

= ત્રિજ્યા^{2}−मई^2.

એજ પ્રમાણે कई·ईड=ત્રિજ્યા^{2}−मई^2 સિદ્ધ થશે.

∴ अई · ईब = कई · ईड.

(૨) ધારો કે ई વર્તુળની બહાર છે.



∵ अई = (ईन+नअ); અને

बई = (ईन−नब)=(ईन−नअ);

∴ अई·ईब=(ईन+नअ) (ईन−नअ),

= $ईन^2$−$नअ^2$, (પ્ર૦.૬)

= ($ईन^2$+$नम^2$)−($नअ^2$+$नम^2$),

= $ईम^2$−$अम^2$,

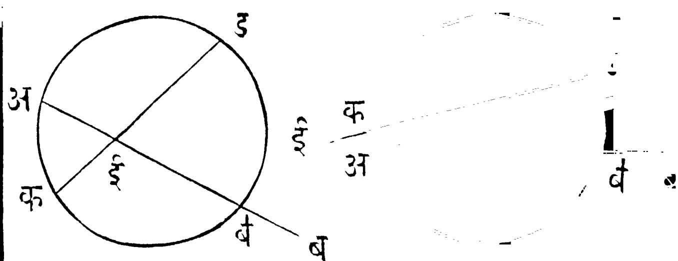
= $ईम^2$−ત્રિજ્યા^{2}.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થશે કે **कई·ईड=$ईम^2$**−ત્રિજ્યા^{2};

∴ **अई·ईब=कई·ईड.**

પ્રમેય ૫૧.

જો બે અંતવાન સીધી લીટીઓ એક બીજીને (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) છેદતી હોય, અને એકના ભાગોથી થએલો કાટખુણ ચોખુણ બીજીના ભાગોથી થએલા કાટખુણ ચોખુણની બરોબર હોય, તો તે બંને લીટીના છેડાનાં બિંદુઓ ચક્રીય છે.



પક્ષ—**अब, कड** અંતવાન લીટીઓ છે, અને તે (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) એક બીજીને **ई**માં છેદે છે, અને **अई·ईब=कई·ईड.**

સાધ્ય—**अ,ब,क,ड** બિંદુઓ ચક્રીય છે.

સિદ્ધતા—**अ,क,ड** એ ત્રણ બિંદુઓમાં થઈને પસાર થાય એવું એકજ વર્તુળ દોરી શકાશે. (પ્ર૦ ૩૨)

જો આ વર્તુળ **ब**માં થઈને પણ પસાર થતું ન હોય, તો તેને

અબને અથવા અબના લંબાવેલા ભાગને ब′માં છેદવા દો. ત્યારે

∵ अब′, कड વર્તુળની જ્યાઓ છે,

∴ कई·ईड=अई·ईब′. (પ્ર૦ ૫૦)

પણ कई·ईड=अई·ईब; (પક્ષ)

∴ अई·ईब=अई·ईब′;

∴ ईब=ईब′;

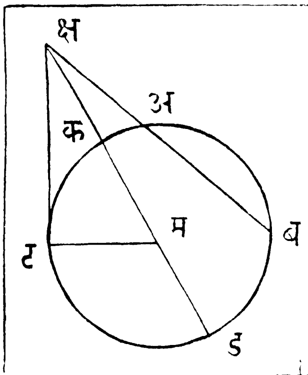
∴ ब, ब′ બિંદુઓ બે જુદી જુદી સ્થિતિમાં હોઈ શકે નહિ, અર્થાત્ તેઓ એક બીજા પર પડે છે.

∴ अकड વર્તુળ बમાં થઈને પસાર થાય છે.

∴ अ,ब,क,ड બિંદુઓ ચક્રીય છે.

પ્રમેય પર.

જો વર્તુળ બહારના કોઈ બિંદુમાંથી બે લીટીઓ એવી રીતે દોરવામાં આવે કે એક તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે અને બીજી તે વર્તુળને છેદે, તો વર્તુળને છેદનારી આખી લીટી અને તેના વર્તુળ બહારના ભાગથી થતો કાટખુણ ચોખુણ વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી પરના ચોરસ બરોબર હોય છે.



પક્ષ—अबक વર્તુળની બહાર એક क्ष બિંદુ છે, અને તેમાંથી क्षअब અને क्षट લીટીઓ દોરી છે. આમાંની क्षअब વર્તુળને છેદે છે, અને क्षट વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

સાધ્ય—बक्ष·क्षअ = क्षट ઉપરનો ચોરસ, અર્થાત્ $क्षट^2$.

રચના—ધારો કે **म** વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **क्ष,म** સાંધો અને **क्षम**ને લંબાવો. ધારો કે તે પરિધને **क** ને **ड**માં છેદે છે.

સિદ્ધતા—∵ **अब**, **कड** જ્યાએ વર્તુળ બહાર **क्ष** બિંદુમાં મળે છે;

∴ **बक्ष·क्षअ=क्षम**^{2}–ત્રિજ્યા^{2}. (પ્ર૦ ૫૦, ભાગ ૨)

=**क्षम**^{2}–**मट**^{2}.

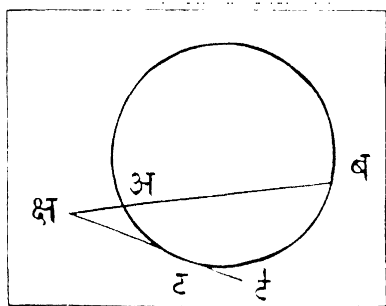
પણ ∵ **क्षटम** એ કાટખુણો છે; (પ્ર૦ ૩૬)

∴ **क्षम**^{2}–**मट**^{2}=**क्षट**^{2}.

∴ **बक्ष·क्षअ=क्षट**^{2}.

પ્રમેય ૫૩.

જો વર્તુળ બહારના કોઇ બિંદુમાંથી બે સીધી લીટીઓ એવી દોરવામાં આવે કે એક વર્તુળને મળે અને બીજી વર્તુળને છેદે, અને જો વર્તુળને છેદનારી આખી લીટી અને તેના વર્તુળ બહારના ભાગથી થતો કાટખુણ ચોખુણ વર્તુળને મળનારી લીટી પરના ચોરસ બરોબર હોય, તો તે મળનારી લીટી વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.



પક્ષ—વર્તુળ બહારના **क्ष** બિંદુમાંથી વર્તુળને છેદનારી એક **क्षअब** લીટી દોરેલી છે. **क्ष** બિંદુમાંથી એક બીજી લીટી વર્તુળને **ट**માં મળે એમ એવી રીતે દોરી છે કે **क्षट** ઉપરનો ચોરસ=**क्षअ·क्षब** છે.

સાધ્ય—**ક્ષટ** વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

સિદ્ધતા—જો **ક્ષટ** વર્તુળને સ્પર્શ કરતી ન હોય, તો ખુલ્લુંજ છે કે તે લંબાવવાથી વર્તુળને છેદશે. ધારો કે તે વર્તુળને ફરીથી **ટ'**માં છેદે છે. ત્યારે—

∵ **અબ**, **ટટ'** એ જ્યાઓ **ક્ષ**માં મળે છે;

∴ **ક્ષટ·ક્ષટ'=ક્ષઅ·ક્ષબ.** (પ્ર૦ ૫૦)

પણ **ક્ષઅ·ક્ષબ=ક્ષટ²**; (પક્ષ)

∴ **ક્ષટ·ક્ષટ'=ક્ષટ²**;

∴ **ક્ષટ·ક્ષટ'=ક્ષટ·ક્ષટ.**

ક્ષટ એ સાધારણ અવયવ કાઢી લઈએ તો

ક્ષટ'=ક્ષટ;

માટે **ટ'** અને **ટ** એ બે બિંદુઓ જુદાં નથી પણ એકજ છે; અર્થાત્ **ક્ષટ** લીટીને લંબાવતાં તે વર્તુળને છેદી શકશે નહિ, એટલે કે તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

પ્રમેય ૫૦થી ૫૩ પરના પ્રશ્નો.

૧. **અબકડ** એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. તેની **બઅ** ને **કડ** બાજુઓને લંબાવતાં તેઓ **મ** બિંદુમાં મળે છે; તો સાબીત કરો કે **મઅ·મબ = મડ·મક.**

૨. જો બે વર્તુળો એક બીજાને છેદતાં હોય, તો સિદ્ધ કરો કે (૧) તેમની સામાન્ય જ્યા તેમની સામાન્ય સ્પર્શ-લીટીને દુભાગે છે; અને (૨) સામાન્ય જ્યાના લંબાવેલા ભાગમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી બંને વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એમ દોરેલી લીટીઓ બરોબર છે.

૩. **મ** વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **મક** તેની ત્રિજ્યા છે. વર્તુળ બહારના એક **ડ** બિંદુમાંથી **મક** પર **ડર** લંબ દોરેલો છે. **ડ,ક** સાંધનારી લીટી વર્તુળને **બ**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ડક·કબ = ૨મક·કર.**

૪. अबक ત્રિકોણનો अ ખુણો સાંકડો ખુણો છે. बकने વ્યાસ તરીકે લઈ એક વર્તુળ દોરેલું છે. જો अमांथी તેને સ્પર્શ કરનારી अड લીટી દોરવામાં આવે, તો સિદ્ધ કરી આપો કે $अब^2+अक^2=बक^2+2अड^2$.

૫. એક વર્તુળના પરિધ પર अ,ब,क ત્રણ બિંદુઓ છે. प એ बक જ્યાનું મધ્યબિંદુ છે; અને म વર્તુળનું મધ્ય-બિંદુ છે. बकने चमां છેદનારી એક अचल જ્યા દોરી છે; તો બતાવી આપો કે अच·चल એ કાટખુણ ચોખુણ $(अम^2-मप^2)$ કરતાં મોટો નથી.

૬. अबकड અને ईबकफ વર્તુળો એક બીજાને ब ને कमां છેદે છે. अई, डफ તેમને સ્પર્શ કરનારી સામાન્ય લીટીઓ દોરેલી છે, અને बक સામાન્ય જ્યા છે, જે લંબાવ-તાં સામાન્ય સ્પર્શલીટીઓને ग અને हमां છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $गह^2=अई^2+बक^2$.

૭. બે વર્તુળો એક બીજાને છેદે છે, અને તેમની સામાન્ય જ્યાને લંબાવી તેમાં એક प બિંદુ લીધું છે. पड, पअ તે વર્તુળોની સ્પર્શલીટીઓ છે; તો બતાવી આપો કે अड લીટી વડે બંને વર્તુળોના જે ખંડો પડે છે તે સરૂપ છે.

૮. अब એક વર્તુળનો વ્યાસ છે. अकड અને बकई એ જ્યાઓ વર્તુળની અંદર એક બીજીને છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $अक\cdot अड+बक\cdot बई=अब^2$.



પ્રકરણ ૨.

નિધાન (અથવા બિંદુમાર્ગ).

એક **અ** બિંદુ લો. તેનાથી એક ઇંચ દૂર એક બીજું બિંદુ લો. આવાં બિંદુઓ કેટલાં લઈ શકાશે ? 'અસંખ્ય.' આ બિંદુઓથી કેવી આકૃતિ બનશે ? 'વર્તુળ.'

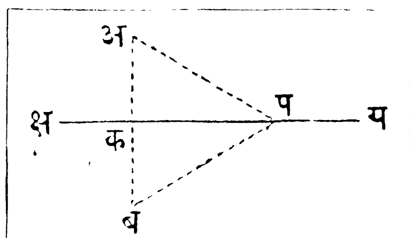
એક કાગળના કડકા પર **અ**,**બ** ગમે તે બિંદુઓ લો, અને કાગળને એવી રીતે વાળો કે **અ** બિંદુ **બ** પર પડે. પડેલા સળમાં ગમે તે એક બિંદુ લો. **અ**,**બ** બિંદુઓથી આ બિંદુનું અંતર સરખું છે કે ઓછુંવત્તું છે ? સળવાળી લીટીમાં એક બીજું બિંદુ લો. **અ**,**બ** બિંદુઓથી આ બિંદુનું અંતર સરખું છે કે ઓછુંવત્તું છે ?...(પ્ર૦).

અ,**બ** બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવાં બને તેટલાં બિંદુઓ લો. એવાં કેટલાં બિંદુઓ લઈ શકાશે ? આ બિંદુઓ-થી કેવી આકૃતિ થશે ? 'સીધી લીટી.'

ઉપલા બે પ્રયોગોમાં બતાવ્યા મુજબ જ્યારે તમને કેટલીક ચોક્કસ શરતો પાળતું હોય એવું બિંદુ લેવાનું કહેવામાં આવે, અને એવી શરતો પાળનાર અનેક બિંદુઓ લઈ શકાતાં હોય તથા તે બિંદુઓથી લીટી બનતી હોય, ત્યારે તે લીટીને તે બિંદુનો માર્ગ એટલે **બિંદુમાર્ગ** અથવા **નિધાન** કહે છે.

પ્રમેય ૫૪.

બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓ-નું નિધાન તે બે બિંદુઓને જોડનારી લીટીને દુભાગનાર લંબ છે.



પક્ષ—**अ,ब** બે આપેલાં બિંદુઓ છે. **क्षय** એક એવી લીટી છે કે તેમાં કોઈ **प** બિંદુ લેવામાં આવે તો **पअ** = **पब** થાય છે.

સાધ્ય—**क्षय** લીટી **अब**ને દુભાગનાર લંબ છે.

રચના—**अब** સાંધો. **अब**નું મધ્યબિંદુ **क** લો.

સિદ્ધતા—**अ,ब**થી સરખે અંતરે રહે એવાં બધાં બિંદુઓ **क्षय** લીટીમાં છે. **क** બિંદુ **अ** તથા **ब**થી સરખે અંતરે છે, માટે **क** બિંદુ **क्षय** લીટીમાં છે, અર્થાત્ **क्षय** લીટી **क** બિંદુમાં થઈને જાય છે, અથવા **क्षय** લીટી **अब**ને દુભાગે છે.

(**पअ, पब** સાંધો).

∵ △ **अपक** અને △ **बपक**માં—

अक = **बक**; (રચના)

कप સામાન્ય છે;

अप = **बप**; (પક્ષ)

∴ એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૪)

∴ ∠**अकप**=∠**बकप**=૧ કાટખુણો;

અર્થાત્ **पक** લીટી **अब** પર લંબ છે.

∵ **प,क** બિંદુઓ **क्षय** લીટીમાં છે;

∴ **क्षय** લીટી **अब**ને દુભાગનાર લંબ છે.

વ્યત્યાસ—બે આપેલાં બિંદુઓને જોડનારી લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કોઈ પણ બિંદુ તે બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

પક્ષ—**अ** અને **ब** એ આપેલાં બિંદુઓ છે. **अ,ब** સાંધીને **अब** લીટીને **क**માં દુભાગી છે. **क** બિંદુમાંથી **अब** પર **कय** લંબ દોરેલો છે.

સાધ્ય—**कय**માંનું કોઈ પણ બિંદુ **अ,ब**થી સરખે અંતરે છે.

રચના—**कय**માં એક **प** બિંદુ લો. **अप,बप** સાંધો.

સિદ્ધતા—∵ **पअक** ને **पबक** ત્રિકોણોમાં—

अक = **बक**, (પક્ષ)

कप સામાન્ય છે,

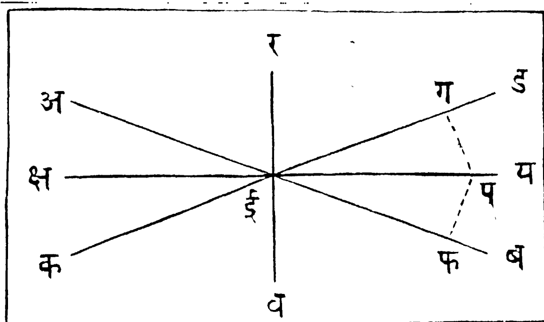
∠**पकअ** = ∠**पकब**; (કાટખુણાઓ)

∴ **पअ** = **पब**. (પ્ર૦ ૧૦)

એજ પ્રમાણે **कय**માંનું કોઈ પણ બિંદુ **अ,ब**થી સરખે અંતરે છે એમ સાબીત કરી શકાશે.

પ્રમેય ૫૫.

એક બીજીને છેદનારી બે લીટીઓથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન, તે બે લીટીઓ વચ્ચેના ખુણાઓને દુભાગનારી બે લીટીઓ હોય છે.



પક્ષ—**अईब, कईड** એક બીજીને છેદનારી લીટીઓ છે. તેમનાથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન **क्षय** છે;

અર્થાત્ **ક્ષય**માં કોઈ પણ પ બિંદુ લઈ તેમાંથી **અઈબ** તથા **કઈડ** પર દોરેલા **પફ,પગ** લંબો સરખા છે.

સાધ્ય—**ક્ષય** લીટી ∠**બઈડ**ને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—∵ **ઈ** બિંદુ **અઈબ** તથા **કઈડ** બંને લીટીમાં સામાન્ય છે;

∴ તે બંનેથી સરખે અંતરે છે.

∵ **અઈબ** અને **કઈડ** લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય એવાં સઘળાં બિંદુઓ **ક્ષય**માં છે; માટે **ઈ** બિંદુ **ક્ષય**માંજ હોવું જોઈએ, અર્થાત્ **ક્ષય** લીટી **ઈ** બિંદુમાં થઈને જાય છે.

હવે ∵ **પઈફ** અને **પઈગ** કાટખુણ ત્રિકોણોમાં—

પઈ એ સામાન્ય કર્ણ છે;

અને **પફ** બાજુ = **પગ** બાજુ, (પક્ષ)

∴ એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૫)

∴ ∠**પઈફ** = ∠**પઈગ**.

વ્યત્યાસ—એક બીજીને છેદનારી બે લીટીઓ વચ્ચેના ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ, આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

પક્ષ—**અબ, કડ** વચ્ચેના ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં ગમે તે એક **પ** બિંદુ છે.

સાધ્ય—**પફ** લંબ = **પગ** લંબ.

સિદ્ધતા—∵ **પઈફ** ને **પઈગ** ત્રિકોણોમાં—

∠**પઈફ** = ∠**પઈગ**, (પક્ષ)

∠**પફઈ** = **પગઈ**, (કાટખુણા)

અને **પઈ** સામાન્ય છે;

∴ એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૧)

∴ **પફ** = **પગ**.

∴ **પ** બિંદુ **અબ,કડ** લીટીઓથી સરખે અંતરે છે.

(ઉપલા પ્રમેયમાં અને તેના વ્યત્યાસમાં જે ક્ષય લીટીના સંબંધમાં સિદ્ધ કર્યું છે, તેજ રવના સંબંધમાં પણ સિદ્ધ થઈ શકશે).

૫૪,૫૫ પ્રમેયો પરના પ્રશ્નો.

૧. એક આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટીથી આપેલી અંતવાન સીધી લીટી જેટલે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન કયું ? એવાં નિધાન કેટલાં થઈ શકે ?

૨. બે સમાંતર લીટીઓથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૩. આપેલી લીટી જેમનો પાયો હોય, અને પાયાના છેડાના એકજ બિંદુમાં મળનારી જેમની બાજુઓમાંની દરેક લીટી એક બીજી આપેલી લીટી બરોબર હોય, એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૪. એક બીજીને છેદનારી બે અમર્યાદ સીધી લીટીથી સરખે અંતરે હોય એવાં બિંદુઓનાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે ?

૫. જે ત્રિકોણો આપેલા પાયા પર અને તેની એકજ બાજુએ હોય; તથા એક આપેલી સીધી લીટી જેટલી ઉંચાઇના હોય, તેમનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૬. આપેલી અમર્યાદ લીટીની બહારના એક આપેલા બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી જે અનેક લીટીઓ દોરી શકાય તે સઘળીનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૭. જે ત્રિકોણો આપેલા એકજ પાયા પર હોય, અને પાયાના એકજ છેડા આગળના જેના ખુણાઓ એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય, એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ? એવાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે ?

૮. બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થનાર વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૯. એક આપેલા વર્તુળના પરિઘથી આપેલે અંતરે આવેલાં બિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૦. આપેલા બિંદુથી એક આપેલે અંતરે હોય અને આપેલી સીધી લીટીથી બીજે આપેલે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૧૧. એક આપેલા વર્તુળની આપેલી જ્યાને સમાંતર દોરેલી જ્યાઓના મધ્યબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૨. એક આપેલી લીટીને સ્પર્શ કરનારાં આપેલી ત્રિજ્યા-વાળાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૩. બે આપેલી સમાંતર સીધી લીટીઓને સ્પર્શ કર-નારાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪. એક બીજીને છેદનારી બે સીધી લીટીઓને સ્પર્શ કરતાં હોય એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે ?

૧૫. ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનાર લંબો એક બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૬. કોઈ પણ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનાર લીટીઓ એક બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુ ત્રિકોણની બાજુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૭. ત્રિકોણના એક ખુણાને દુભાગનારી લીટી અને તે ખુણો કરનારી બાજુઓને સામે આવેલા પાયાની પેલી બાજુએ લંબાવવાથી થતા બહારના બે ખુણાઓને દુભાગ-નારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુ ત્રિકોણ-ની બાજુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૮. જે ત્રિકોણો આપેલા એકજ પાયા પર હોય અને જેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણાઓ એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૯. એક આપેલી લીટીને આપેલા બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૦. જે વર્તુળો એક આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે અને જેમની ત્રિજ્યા એક આપેલી લીટી બરોબર હોય એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૧. એક આપેલા વર્તુળને આપેલા બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૨. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે; તેમને સ્પર્શ કરનારાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૩. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે બે આપેલાં બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય.

૨૪. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે બે બીજી આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય.

૨૫. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે એક આપેલા બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય.

૨૬. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે એક આપેલી બીજી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય.

૨૭. એક આપેલા બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય અને બે બીજાં આપેલાં બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૨૮. એક આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય અને આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૨૯. બે સમાંતર સીધી લીટીઓ વચ્ચે આપેલા એક બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય અને તે સમાંતર લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૦. એક આપેલા બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય અને બે આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૧. એક આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય અને બે બીજી આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૨. એક આપેલા બિંદુથી અને એક આપેલી લીટીથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૩. બે આપેલાં બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય અને બે આપેલી લીટીઓથી પણ સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૪. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૫. બે આપેલી લીટીઓથી આપેલે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૬. **अबक** ત્રિકોણનો **अ** ખુણો કાટખુણો છે. **अक**માં એક એવું **ड** બિંદુ શોધી કાઢો કે **बक**થી તેનું અંતર **अड** બરોબર હોય.

૩૭. જેની લંબાઈ નિત્ય છે એવી એક લીટી એક કાટ-ખુણાના ભુજો વચ્ચે (અથવા ભુજો ઉપર) ગબડ્યા કરે છે; તો તેના મધ્યબિંદુનું નિધાન શોધી કાઢો.

૩૮. જે બિંદુઓમાંથી આપેલી બે અમર્યાદ લીટીઓ પર દોરેલા બે લંબોનો તફાવત આપેલી એક ત્રીજી લીટીની બરોબર હોય એવાં સઘળાં બિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો. એવાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે?

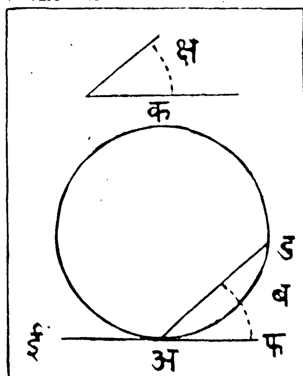
૩૯. જે ત્રિકોણો આપેલા એકજ પાયા પર અને તેની એકજ બાજુએ હોય, અને જે દરેકની બીજી બે બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો પાયા પરના ચોરસ બરોબર હોય, એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

પ્રકરણ ૩.

(કૃત્યો.)

કૃત્ય ૨૦.

એક આપેલા વર્તુળમાંથી એક એવો વર્તુળખંડ કાપી કાઢો કે જેમાંનો ખુણો એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય.



अबक આપેલું વર્તુળ છે. **क्ष** આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા વર્તુળને **अ** બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે એવી **ईअफ** લીટી દોરો. **ईअफ** લીટીના **अ** બિંદુ આગળ **क्ष** ખુણા બરોબરનો **फअड** ખુણો કરો. ધારો કે **अड** લીટી પરિધને **ड**માં છેદે છે. (ધારો કે **फअड** ખુણાની પેલી બાજુ પરના પરિધ પર એક **क** બિંદુ છે).

अकड એ જોઈતો વર્તુળખંડ છે.

સિદ્ધતા—∵ **ईअफ** સ્પર્શલીટી છે, અને **अड** જ્યા **अ** સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી છે.

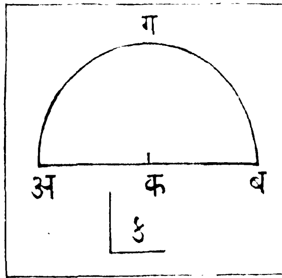
∴ ∠**फअड**=વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંનો ∠**अकड** (પ્ર૦ ૪૫).

∵ ∠**फअड**=∠**क्ष**,

∴ **अकड** વર્તુળખંડમાંનો ખુણો=∠**क्ष**.

કૃત્ય ૨૧.

એક આપેલી લીટી જેની જ્યા થાય અને જેમાંનો ખુણો એક આપેલા ખુણા બરોબર થાય એવો એક વર્તુળખંડ દોરો.

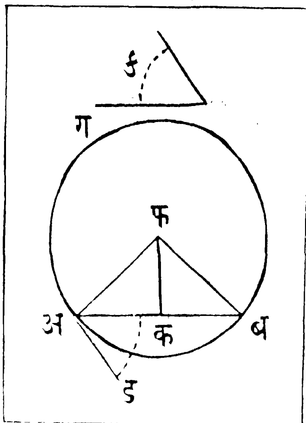


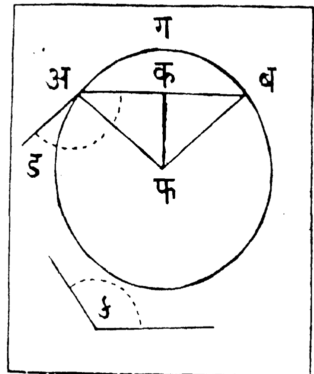
∠ડ એ આપેલો ખુણો છે. **अब** આપેલી લીટી છે.

રચના—જો ∠ડ કાટખુણો હોય, તો **अब**ને **क**માં દુભાગો. (આકૃતિ ૧ જુઓ). **क**ને મધ્યબિંદુ લઈ **कअ** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. **अगब** અર્ધવર્તુળ એ જોઈતો વર્તુળખંડ છે.

∵ **अगब** એ અર્ધવર્તુળ છે,

∴ તેમાંનો કોઈ પણ ખુણો કાટખુણા બરોબર છે. (પ્ર૦ ૪૦)





પણ જો આપેલો ∠ક કાટખુણા કરતાં મોટો અથવા નાનો હોય, તો **અ** બિંદુ આગળ ∠ક જેવડો (જે બાજુએ વર્તુળખંડ દોરવાનો છે તેથી ઉલટી બાજુએ) ∠**बअड** કરો. **डअ** લીટી સાથે કાટખુણો કરે એ પ્રમાણે **अफ** લીટી દોરો. **अब**ને દુભાગનાર **कफ** લંબ દોરો. **फब** સાંધો. (આકૃતિ ૨ તથા ૩ જુઓ).

∵ **अकफ** અને **बकफ** ત્રિકોણોમાં—

अक=कब; (રચના)

कफ બંને ત્રિકોણોમાં સામાન્ય;

∠**अकफ**=∠**बकफ**; (રચના)

∴ **अफ=बफ**. (પ્ર૦ ૧૦)

માટે **फ**ને મધ્યબિંદુ લઈ **फअ** ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ **ब** બિંદુમાં થઈને જશે. આવું વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળનો **अगब** વર્તુળખંડ માગેલો વર્તુળખંડ છે.

સિદ્ધતા—∵ **अड** લીટી **अफ** ત્રિજ્યા સાથે કાટખુણો કરે છે;

∴ **अड** એ સ્પર્શલીટી છે. (કૃ. ૧૭)

∴ ∠**बअड**=વ્યુત્ક્રમ વર્તુળખંડમાંનો ∠**अगब**. (પ્ર૦૪૯)

∵ ∠**बअड** એ આપેલા ખુણા બરોબર છે; માટે આપેલા ખુણા જેવડો જેમાંનો ખુણો છે, અને આપેલી લીટી જેની જ્યા છે, એવો વર્તુળખંડ દોરાયો.

૨૧મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક આપેલી લીટી પર એક એવો વર્તુળખંડ દોરો કે જેમાંનો ખુણો એક આપેલા પહોળા ખુણાની બરોબર હોય.

૨. એક આપેલી લીટી પર એક એવો વર્તુળખંડ દોરો કે જેમાંનો ખુણો એક આપેલા સાંકડા ખુણાની બરોબર હોય.

૩. એક આપેલી લીટી પર એક એવો કાંસ દોરો કે

જેના પરનો પરિધિકોણ એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય.

૪. એક આપેલી લીટી પર એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે જેનો શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો આપેલા ખુણા બરોબર હોય. એવા કેટલા ત્રિકોણ નીકળી શકશે?

૫. આપેલા પાયા પર એક એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો કે જેનો શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય.

૬. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણો દોરો—

(૧) પાયો, એક બાજુ, અને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો.

(૨) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને જે બિંદુમાં છેદતો હોય તે બિંદુ.

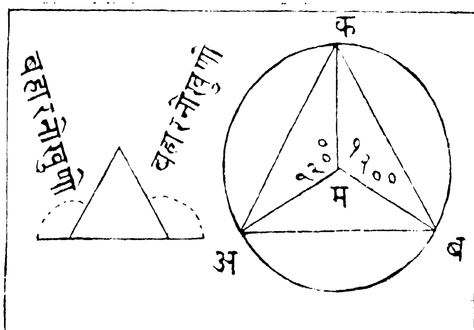
(૩) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને ઉંચાઈ.

(૪) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને ક્ષેત્રફળ.

(૫) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા.

કૃત્ય ૨૨.

આપેલા વર્તુળમાં એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.



अकब આપેલું વર્તુળ છે.

રચના—એક ગમે તેવો સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેની એક બાજુ લંબાવીને બહારના ખુણાઓ કરો. આપેલા વર્તુળનું **म** મધ્યબિંદુ શોધી કાઢો. **म** આગળ લગોલગ બે ખુણાઓ એવા કરો કે જે સમબાજુ ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓ બરોબર હોય. આ ખુણાઓના ભુજ પરિધને **अ**, **ब**,**क**માં મળે છે એમ સમજો. **अब**, **बक**, **कअ** સાંધો.

अबक જોઈતો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો ૬૦° હોય છે, માટે બહારનો દરેક ખુણો ૧૨૦° છે.

વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ એકંદર ૪ કાટખુણા હોય છે. તેમાંથી **म** આગળના બે ખુણાઓમાંનો દરેક ૧૨૦° છે; માટે બાકીનો ખુણો **अमब** ૧૨૦° છે.

∴ ∠**अमब**=∠**बमक**=∠**कमअ**.

∴ કાંસો **अब**, **बक**, **कअ** સઘળા સરખા છે. (પ્ર૦ ૩૩)

∴ **अब**, **बक**, **कअ** જ્યાઓ પરસ્પર સરખી છે. (પ્ર૦ ૩૪)

∴ **अबक** સમબાજુ છે.

૨૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

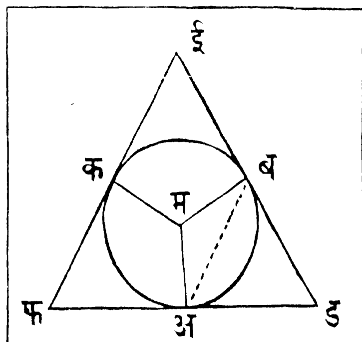
૧. એક આપેલા વર્તુળમાં એક આપેલા ત્રિકોણને સમકોણ ત્રિકોણ દોરો.

૨. ૩" જેટલી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળમાં એક આપેલા પહોળખુણ ત્રિકોણને સમકોણ હોય એવો ત્રિકોણ દોરો.

૩. ૧·૪" જેટલી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળમાં એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે જેની બાજુઓ એક આપેલા ત્રિકોણની બાજુઓને સમાંતર હોય.

કૃત્ય ૨૩.

એક આપેલા વર્તુળની આસપાસ સમબાજુ ત્રિકોણ દોરવો.



રચના—આગલા કૃત્યમાં બતાવ્યા પ્રમાણે **म** મધ્ય-બિંદુમાંથી એવી લીટીઓ દોરો કે લગોલગ આવેલા ખુણા-માંનો દરેક ૧૨૦° થાય, અને તે લીટીઓને પરિધને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તે લીટીઓ **अ,ब,क**માં પરિધને મળે છે.

अ,ब,क આગળ વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટીઓ દોરો.

∵ ∠**अ** અને ∠**ब** દરેક કાટખુણો છે; (પ્ર૦ ૩૫) માટે ∠**बअड**+∠**अबड** એ બે કાટખુણા કરતાં નાના છે. માટે આ સ્પર્શલીટીઓને લંબાવવામાં આવે તો તેઓ એક બીજીને મળશે. આ પ્રમાણે ત્રણે સ્પર્શલીટીઓને લંબાવવાથી તેઓ મળશે. ધારો કે તેઓ **ड,ई,फ** બિંદુઓમાં મળે છે.

डईफ જોઈતો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—अडबम ચતુષ્કોણ છે;

∴ તેના અંદરના ખુણાઓ=૪ કાટખુણા.

આમાંના ∠**मअड**+∠**मबड**=૨ કાટખુણા;

અને ∠**अमब**=૧૨૦°;

∴ બાકીનો ∠**अडब**=∠**अमब**નો ન્યૂનતાપૂરક;

=૬૦°.

એજ પ્રમાણે ∠**डईफ** અને **ईफड** એ દરેક ૬૦° છે એમ સિદ્ધ થઈ શકશે.

∴∠**अडब**, અર્થાત્ ∠**फडई**=∠**डईफ**=∠**ईफड**=૬૦°.

∴ **डईफ** એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

૨૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. ઉપલી આકૃતિમાં **डईफ** એક ગમે તેવો ત્રિકોણ છે, અને તેનો સમકોણ એક **लमन** ત્રિકોણ વર્તુળની આસ-પાસ દોરેલો છે. સાબીત કરો કે (૧) **सब** ત્રિજ્યા સાથે **स** બિંદુ આગળ **डईग**, **डफह** ખુણા બરોબરના ખુણા કરનારી **सअ**, **सक** લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં નથી; (૨) તેમની વચ્ચેનો બહિર્વક્ર ખુણો **सब** બાજુ તરફ આવશે; (૩) **डईफ** ત્રિકોણની **ड** બિંદુમાં મળનારી બાજુઓમાંની એકને લંબાવવાથી થતો બહારનો ખુણો **असक** ખુણાની બરોબર થશે; અને (૪) **अ**,**क** બિંદુઓ આગળ દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ **असक** એ અંતર્વક્ર ખુણાની બાજુ તરફ લંબાવવાથી મળશે.

૨. એમ સાબીત કરો કે કોઈ વર્તુળમાં દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ આગળ તે વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીઓ દોરવામાં આવે તો તેઓ એક બીજીને મળશે, અને તે વર્તુળની આસપાસ દોરાએલો સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવશે.

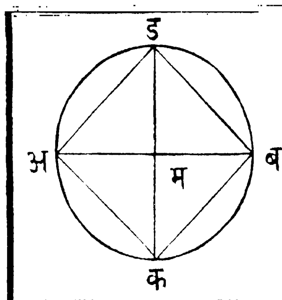
૩. એક આપેલા વર્તુળની આસપાસ એક આપેલા ત્રિકોણને સમકોણ હોય એવો ત્રિકોણ દોરો.

૪. વર્તુળની આસપાસ દોરેલો સમબાજુ ત્રિકોણ તે વર્તુળની અંદર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણથી ચારગણો છે.

૫. વર્તુળની અંદર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણની કોઈ પણ બાજુ તે વર્તુળની આસપાસ દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુના અર્ધ બરોબર હોય છે.

કૃત્ય ૨૪.

આપેલા વર્તુળમાં ચોરસ દોરવો.



રચના—આપેલા વર્તુળના મધ્યબિંદુ **म**માં થઈને જાય એવો એક **अमब** વ્યાસ દોરો. **अमब** સાથે કાટખુણો કરનારો બીજો **कमड** વ્યાસ **म**માં થઈને જાય એવો દોરો. **अ,ड, ब,क** સાંધો.

अडबक જોઈતો ચોરસ છે.

સિદ્ધતા—∵ ∠**अमड**=∠**डमब**=∠**बमक**=∠**कमअ**; (રચના અને પ્ર૦ ૩)

∴ કૈાસ **अड**=કૈાંસ **डब**=કૈાંસ **बक**=કૈાંસ **कअ**;(પ્ર૦૩૩)

∴ **अड=डब=बक=कअ.** (પ્ર૦ ૩૪)

∵ **कअड** એ અર્ધવર્તુળ છે;

∴ ∠**कअड** કાટખુણેા છે. (પ્ર૦ ૪૦)

એવીજ રીતે ∠**अडब**, ∠**डबक**, ∠**बकअ** એ દરેક કાટખુણેા છે;

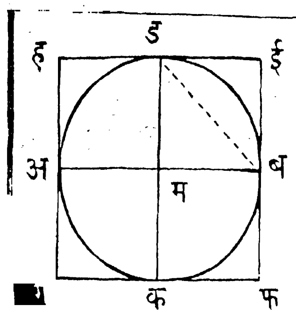
∴ **अडबक** એ ચેારસ છે.

૨૪મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નેા.

૧. વર્તુળમાં દેારેલેા ચેારસ તે વર્તુળની ત્રિજ્યા પરના ચેારસથી બમણેા અને વ્યાસ ઉપરના ચેારસથી અર્ધો હેાય છે.

કૃત્ય ૨૫.

એક આપેલા વર્તુળની આસપાસ ચેારસ દેારવેા.



રચના—म મધ્યબિંદુમાં થઈને જતેા **अमब** વ્યાસ દેારેા. **अब** સાથે કાટખુણેા કરે એવેા **कमड** બીજો વ્યાસ દેારેા. **अ, ब,क,ड** બિંદુએા આગળ વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટીએા દેારેા. **डब** સાંધેા.

∵ ∠**ईडब** એક કાટખુણા કરતાં નાનેા છે, અને

∠**ईबड** એક કાટખુણા કરતાં નાનેા છે;

∴ ∠ईडब + ∠ईबड એ કાટખુણા કરતાં નાના.
માટે डई અને बई લંબાવવાથી મળશે.
એજ કારણથી બીજી સ્પર્શલીટીઓ પણ લંબાવવાથી મળશે.
ધારો કે તેઓ ई,फ,ग,ह બિંદુઓમાં મળે છે.
ईफगह એ જોઈતો ચોરસ છે.

સિદ્ધતા—∵ ∠डमब=૧ કાટખુણો, (રચના)
અને ∠मडई=૧ કાટખુણો, (પ્ર૦ ૩૬)
∴ ∠डमब+मडई=૨ કાટખુણા;
∴ हडई ॥ अब. (પ્ર૦ ૫)
એજ કારણથી गकफ ॥ अब;
∴ हई ॥ गफ. (પ્ર૦ ૭)
તેજ પ્રમાણે हअग ॥ डमक ॥ ईबफ;
∴ हईफग એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
∵ हअबई એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે;
∴ हई=अब. (પ્ર૦ ૨૨)
એજ પ્રમાણે कड = ईफ.
પરંતુ ∵ अब = कड; (રચના)
∴ हई = ईफ;
∴ हई = ईफ = फग = गह. (પ્ર૦ ૨૨)
∵ डक ॥ ईफ,
અને ∠मडई = ૧ કાટખુણો; (પ્ર૦ ૩૬)
∴ ∠ई = ૧ કાટખુણો. (પ્ર૦ ૬)
એજ કારણથી फ, ग, ह આગળના ખુણાઓ પણ કાટ-ખુણા છે.
∴ ईफगह એ ચોરસ છે.

૨૫મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

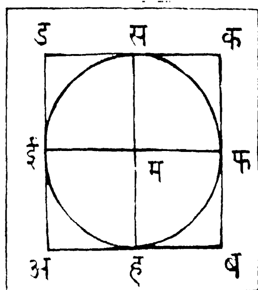
૧. વર્તુળની આસપાસ દોરેલો ચોરસ તે વર્તુળની અંદર

દોરેલા ચોરસથી બમણો અને તે વર્તુળની ત્રિજ્યા પર દોરેલા ચોરસથી ચારગણો હોય છે.

૨. કોઈ વર્તુળના ગમે તે બે વ્યાસોના છેડા આગળ દોરેલી સ્પર્શલીટીઓથી થતા ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે, અને તેથી કરીને તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

કૃત્ય ૨૬.

આપેલા ચોરસમાં વર્તુળ દોરવું.



अबकड આપેલો ચોરસ છે.

રચના—अब,अडને **ह** તથા **ई** બિંદુમાં અનુક્રમે દુભાગો. **ह** બિંદુમાંથી **अड**ને સમાંતર **हस** લીટી દોરો. **ई**માંથી **अब**ને સમાંતર **ईफ** લીટી દોરો. ધારો કે **हस** અને **ईफ** લીટીઓ **डक** અને **कब**ને અનુક્રમે **स** અને **फ** બિંદુમાં મળે છે, અને એક બીજીને **म**માં છેદે છે.

म એ માગેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

સિદ્ધતા—∵ **अब = अड**, (પક્ષ)

અને **अह** = $\frac{1}{2}$**अब**; અને

अई = $\frac{1}{2}$ **अड**;

∴ **अह = अई**.

∵ **अड** ‖ **हस** ‖ **बक**, અને **अब** ‖ **ईफ** ‖ **डक**; (રચના)

∴ ઉપલી આકૃતિમાંના સઘળા ચતુષ્કોણો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે.

∵ **अईमह** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

अह=अई;

∴ **ईम=मह**. (પ્ર૦ ૨૨)

એવીજ રીતે સિદ્ધ કરી શકાશે કે **मह=मफ, मफ=मस, मस=मई.**

માટે **म**ને મધ્યબિંદુ લઈ **मई** ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ **ई,ह,फ,स** બિંદુઓમાં થઈને જશે.

હવે ∵ ∠**अ**=કાટખુણો,

∴ ∠**अईम**=કાટખુણો. (પ્ર૦ ૬)

એવીજ રીતે ∠**स**, ∠**फ**, ∠**ह** એ કાટખુણા છે; માટે **अड, डक, कब, बअ** એ વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીઓ થશે.

૨૬મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

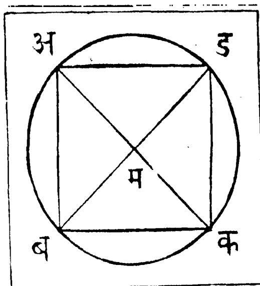
૧. આપેલા સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં એક વર્તુળ દોરો, અને સિદ્ધ કરો કે તે સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણોનું છેદન-બિંદુ આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૨. કોઈ પણ ચોરસના બે પાસપાસેના ખુણાઓને દુભાગ-નારી લીટીઓના છેદનબિંદુને મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને તે છેદનબિંદુમાંથી એક બાજુ પર દોરેલા લંબ જેટલી ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ તે ચોરસની અંદર દોરેલું વર્તુળજ છે એમ સાબીત કરો.

૩. લંબચોરસમાં વર્તુળ દોરી શકાશે કે ?

કૃત્ય ૨૭.

આપેલા ચોરસની આસપાસ વર્તુળ દોરવું.



अबकड આપેલો ચોરસ છે.

રચના—**अक,बड** સાંધો. ધારો કે **अक, बड** લીટીઓ **म** બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે.

સિદ્ધતા—∵ **अडब** ત્રિકોણમાં, **अड=अब;**

∴ ∠अबड=∠अडब. (પ્ર૦ ૧૨)

પરંતુ बअड ત્રિકોણનો ∠अ કાટખુણો છે,

∴ ∠अडब એટલે ∠अडम=½ કાટખુણો.

એવીજ રીતે ∠डअम=½ કાટખુણો,

∴ ∠अडम=∠डअम,

∴ अम=मड. (પ્ર૦ ૧૩)

એજ કારણથી मड = मक = मब.

માટે मને મધ્યબિંદુ લઈને मअ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ अ,ब,क,ड બિંદુઓમાં થઈને જશે.

૨૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

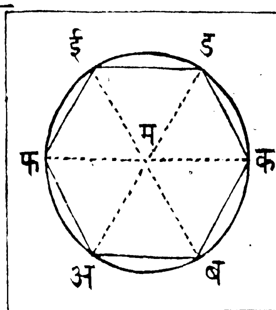
૧. એક આપેલા લંબચોરસની આસપાસ વર્તુળ દોરો.

૨. સિદ્ધ કરી આપો કે ચોરસની અંદર અને તેજ ચોરસની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનું મધ્યબિંદુ એકજ છે.

૩. ચોરસની આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા પરનો ચોરસ, તે ચોરસની અંદર દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા પરના ચોરસથી કેટલાગણો હોય?

કૃત્ય ૨૮.

આપેલા વર્તુળમાં એક નિયમિત ષટ્કોણ દોરવો.



રચના—આપેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ म લો. એક अमड વ્યાસ દોરો. अम, मड ત્રિજ્યાઓ પર સમબાજુ ત્રિકોણો દોરો. આ ત્રિકોણોની म બિંદુમાં મળનારી બાજુઓને બંને તરફ પરિધિને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તેઓ પરિધિને ब,क,ई,फ બિંદુઓમાં મળે છે. अबकडईफ સાંધો.

સિદ્ધતા—∵ ∠अमब=६०°, (રચના)

તેમજ ∠डमक=६०°, („)

∴ ∠कमब=६०°; (પ્ર० ૧)

∴ સામેના ખુણાઓ ∠**डमई**, ∠**ईमफ**, ∠**फमअ** પૈકી દરેક ખુણો = ૬૦°. (પ્ર० ૩)

∵ ∠अमब=∠बमक=∠कमड=∠डमई=∠ईमफ =∠फमअ;

∴ કૌંસ **अब**=કૌંસ **बक**=**कड**=**डई**=**ईफ**=**फअ**; (પ્ર० ૩૩)

∴ જ્યા **अब**=જ્યા **बक**=**कड**=**डई**=**ईफ**=**फअ** (પ્ર० ૩૪)

∴ **अबकडईफ** આકૃતિ સમબાજુ છે.

∵ ∠अमब=६०°, (રચના)

અને ∠मअब=∠मबअ, (પ્ર० ૧૨)

∴ ∠मअब=६०°.

એવીજ રીતે સાબીત થઈ શકશે કે **अ**,**ब**,**क**,**ड**,**ई**,**फ** એ બિંદુઓ આગળના બે અંદરના ખુણાઓમાંનો દરેક ૬૦° છે.

માટે ∠फअब=१२०°=∠अबक=∠बकड=∠कडई =∠डईफ=∠ईफअ.

∴ **अबकडईफ** આકૃતિ સમકોણ પણ છે.

૨૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. આપેલી **अब** લીટી પર એક નિયમિત ષટ્કોણ દોરો.

૨. ૨૮મા કૃત્યની આકૃતિમાં **अ**,**क**,**ई** સાંધો અને સિદ્ધ કરો કે **अकई** સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

૩. વર્તુળમાં દોરેલા ષટ્કોણની દરેક બાજુ ત્રિજ્યા બરોબર છે, અને ષટ્કોણનું ક્ષેત્રફળ વર્તુળની ત્રિજ્યા પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણથી છગણું હોય છે.

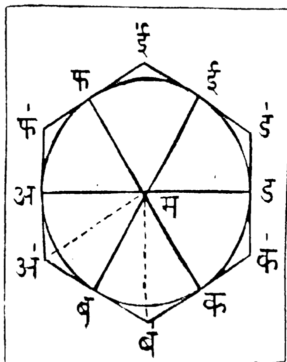
૪. ૨૮મા કૃત્યની આકૃતિમાં **बफ**, **अक**, **अई** સાંધો, અને સિદ્ધ કરો કે **अक** અને **अई** લીટીઓ **बफ**ના ત્રણ સરખા ભાગ કરે છે.

૫. વર્તુળમાં દોરેલા નિયમિત ષટ્કોણની પરિમિતિ વ્યાસથી કેટલાગણી હોય છે ?

૬. વર્તુળમાં દોરેલો નિયમિત ષટ્કોણ તેજ વર્તુળમાં દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણ કરતાં બમણો હોય છે.

કૃત્ય ૨૯.

આપેલા વર્તુળની આસપાસ નિયમિત ષટ્કોણ દોરવો.



રચના—આપેલા વર્તુળના મધ્યબિંદુ **म**માં થઈ જતો એક **अमड** વ્યાસ દોરો. **अम, मड** પર સમબાજુ ત્રિકોણો દોરો. **म** બિંદુમાં મળનારી આ ત્રિકોણોની બાજુઓને બંને તરફ પરિધને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તેઓ પરિધને **ब, क, ई, फ** બિંદુઓમાં મળે છે.

∵ ∠**अमब** અને ∠**कमड** દરેક ૬૦° છે; (રચના)

∴ ∠**बमक** = ૬૦°. (પ્ર૦ ૧)

એવીજ રીતે સામેના ખુણાઓ ∠**अमफ**=∠**फमई** = ∠**ईमड**=૬૦°. (પ્ર૦ ૩)

मअ, मब, मक, मड, मई, मफ ત્રિજ્યાઓના છેડાનાં બિંદુ આગળ સ્પર્શલીટીઓ દોરો. એ લીટીઓ લંબાવવાથી મળશે. ધારો કે તેઓ **अं, बं, कं, डं, ईं, फं**, બિંદુઓમાં મળે છે.

अंबंकंडंईंफं જોઈતો ષટ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—अअ'बम ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં બે ખુણાઓ કાટખુણા છે અને ત્રીજો ખુણો **अमब=૬૦°** છે; માટે બાકીનો ∠**अअ'ब=૧૨૦°.**

એજ કારણથી ∠**बब'क**=∠**कक'ड**=∠**डड'ई**=∠**ईई'फ** =∠**फफ'अ=૧૨૦°.**

∵ **अ'म** એ ∠**अमब**ને દુભાગે છે; (પ્ર૦ ૩૭)

∴ **अ'मअ=૩૦°.**

એજ કારણથી ∠**अ'मब** = ∠**बमब'** = ∠**ब'मक** = ∠**कमक'** =∠**क'मड** = ∠**डमड'=ड'मई** = ∠**ईमई'** = ∠**ई'मफ**= ∠**फमफ'**=∠**फ'मअ=૩૦°.**

∴ ∠**अ'मब'**=∠**ब'मक'=क'मड'**=∠**ड'मई'**=∠**ई'मफ'** =∠**फ'मअ'=૬૦°.**

∵ **अ'म** એ ∠**अअ'ब**ને દુભાગે છે; (પ્ર૦ ૩૭)

∴ ∠**मअ'ब'** = ૬૦°.

એજ કારણથી ∠**अ'ब'म=૬૦°;**

અને **अ'मब'=૬૦°.** (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

∴ **अ'मब'** △ સમબાજુ છે.

એવીજ રીતે **ब'मक', क'मड', ड'मई', ई'मफ', फ'मअ'** ત્રિકોણો પણ સમબાજુ છે એમ સિદ્ધ થઈ શકશે.

∴ **अ'ब'=ब'क'=क'ड'=ड'ई'=ई'फ'=फ'अ'.**

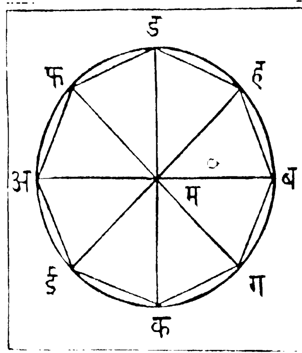
∴ **अ'ब'क'ड'ई'फ'** સમબાજુ છે.

અને ∵ ∠**अअ'ब**, ∠**बब'क**...એ દરેક ૧૨૦° છે;

∴ **अ'ब'क'ड'ई'फ'** સમકોણ છે.

કૃત્ય ૩૦.

આપેલા વર્તુળમાં નિયમિત અષ્ટકોણ દોરવો.



રચના—म મધ્યબિંદુમાં થઈ જતો **अमब** વ્યાસ દોરો. તેની સાથે કાટખુણો કરે એવો બીજો **कमड** વ્યાસ દોરો. વળી **अमक** અને **अमड** ખુણાઓને દુભાગનાર **ईह** અને **फग** વ્યાસો દોરો. **अफ, फड, डह, हब, बग, गक, कई,** અને **ईअ** સાંધો.

अईकगबहडफ એ માગેલો અષ્ટકોણ છે.

સિદ્ધતા—∵ ∠**अमई** = $\frac{1}{2}$ કાટખુણો = ∠**ईमक** = ∠**कमग**... (રચના)

∴ **अई=ईक=कग=गब=बह=हड=डफ=फअ.**

(પ્ર૦ ૩૩ તથા ૩૪)

∴ **अईकगबहडफ** એ સમબાજુ છે.

હવે ∵ ∠**अमई** = $\frac{1}{2}$ કાટખુણો, (રચના)

∴ ∠**मअई**+∠**मईअ**=$\frac{3}{2}$ કાટખુણો. (પ્ર૦ ૮)

અને ∵ ∠**मअई**=∠**मईअ**, (પ્ર૦ ૧૨)

∴ ∠**मअई**=$\frac{3}{4}$ કાટખુણો.

એજ પ્રમાણે अ, ई, क, ग, ब, ह, ड, फ એ બિંદુઓ આગળના બે અંદરના ખુણાઓમાંનો દરેક=$\frac{3}{4}$ કાટખુણો.

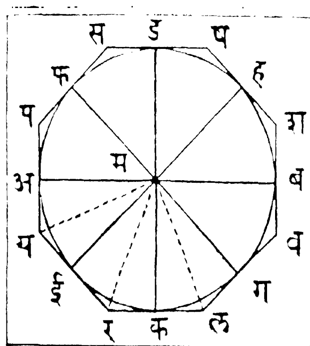
∴ ∠फअई=$\frac{3}{4}$×૨ = ૧$\frac{1}{2}$ કાટખુણો.

એજ પ્રમાણે ∠ई, ∠क, ∠ग, ∠ब, ∠ह, ∠ड, ∠फ એ દરેક=૧$\frac{1}{2}$ કાટખુણો.

∴ **अईकगबहडफ** સમકોણ પણ છે.

કૃત્ય ૩૧.

આપેલા વર્તુળની આસપાસ નિયમિત અષ્ટકોણ દોરવો.



રચના—म મધ્યબિંદુમાં થઈ જતો એક **अमब** વ્યાસ દોરો. તેની સાથે કાટખુણો કરે એવો એક બીજો **कमड** વ્યાસ દોરો. ∠**अमक** અને ∠**अमड**ને દુભાગનાર **ईह, फग** વ્યાસ દોરો. अ, ई, क, ग, ब, ह, ड, फ બિંદુઓ આગળ આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટીઓ દોરો; અને તેમને **य, र, ल, व, श, ष, स, प** બિંદુઓમાં મળવા દો. **मय, मर, मल, मव, मश, मष, मस, मप** સાંધો.

यरलवशषसप એ માગેલો અષ્ટકોણ છે.

સિદ્ધતા—

∵ अयईम ચતુષ્કોણ છે, અને તેના ∠यअम અને ∠यईम એ કાટખુણા છે; માટે ∠अयई એ ∠अमईનો ન્યૂનતાપૂરક છે.

એજ પ્રમાણે ∠ईरक એ ∠ईमकनो ન્યૂનતાપૂરક છે.

પરંતુ ∵ ∠अमई=∠ईमक=∠कमग=......ઘ૦.

∴ ∠अयई=∠ईरक=∠कलग=......ઘ૦.

∴ यरलवशषसप એ આકૃતિ સમકોણ છે.

∵ यम, रम, लम......એ य, र, ल......આગળ-ના ખુણાઓને દુભાગે છે; (પ્ર૦ ૩૭)

અને હમણાંજ સિદ્ધ કરી ગયા કે એ ખુણાઓ સરખા છે;

∴ ∠मयई=½ ∠अयई; ∠मरई=½ ∠ईरक...ઘ૦.

∴ ∠मयर=∠मलर=∠यरम=∠लरम.

હવે ∵ यरम અને मरल ત્રિકોણોમાં—

∠यरम=∠मरल;

∠मयर=∠मलर;

रम બંનેમાં સામાન્ય;

∴ यर=रल. (પ્ર૦ ૧૧)

એજ પ્રમાણે સાબીત થશે કે रल=लव=वश=शष=षस=सप.

∴ यरलवशषसप એ આકૃતિ સમબાજુ પણ છે.

૨૬થી ૩૧ કૃત્યો પરના પ્રશ્નો.

૧. આપેલી નિયમિત બહુકોણ આકૃતિમાં એક વર્તુળ દોરો.

૨. આપેલી નિયમિત બહુકોણ આકૃતિની આસપાસ એક વર્તુળ દોરો.

૩. ૧"ના પાયાવાળા એક નિયમિત પંચકોણની અંદર તથા તેની આસપાસ વર્તુળ દોરો.

૪. ૧·૪"ની ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની અંદર તથા તેની આસપાસ દોરેલા નિયમિત ષટ્કોણોની પરિમિતિ શોધી કાઢો.

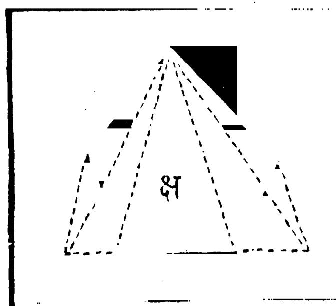
૫. આપેલા વર્તુળની અંદર તથા તેની આસપાસ નિયમિત દ્વાદશકોણ કાઢો.

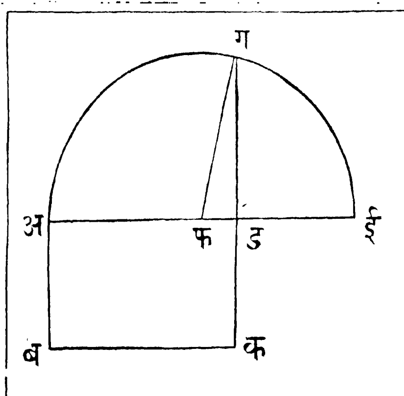
૬. વર્તુળની અંદર તથા તેની આસપાસ દોરેલા નિયમિત ષટ્કોણની તથા અષ્ટકોણની બાજુ સામે આવેલા વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળના ખુણાનું મહત્ત્વ કેટલું હોય ?

(નીચેનું કૃત્ય ટ્રેનિંગ કૉલેજો માટે મુકરર કરેલા ભાગમાં આવતું નથી).

કૃત્ય ૩૨.

એક આપેલી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિની બરોબરનો ચોરસ દોરવો.





क्ष એ આપેલી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિ છે.

રચના—જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય અને જે આપેલી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિની બરોબર હોય એવો એક **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. (કૃત્ય ૧૫)

તેની **अड** બાજુ લંબાવો, અને **डई**ને **डक** બરાબર રાખો. **अई**ને **फ**માં દુભાગો. **फ**ને મધ્યબિંદુ લઈને **फई** ત્રિજ્યાએ એક **अगई** વર્તુળ દોરો. **कड**ને **अगई** વર્તુળને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તે વર્તુળને **ग** બિંદુમાં મળે છે.

डग લીટી પરનો ચોરસ માગેલો ચોરસ થશે.

સિદ્ધતા—∵ **क्ष=अड·डक;**

અને ∵ **डक=डई;**

∴ **क्ष=अड·डई.**

=(अफ+फड) (फई−फड).

=(अफ+फड) (अफ−फड).

=अफ^2−फड^2. (૫० ड)

∵ **अफ=फग;**

∴ **क्ष=फग^2−फड^2.**

$$=(\text{ફડ}^2+\text{ડગ}^2)-\text{ફડ}^2$$
$$=\text{ડગ}^2$$
$$\therefore \text{ક્ષ}=\text{ડગ}^2.$$

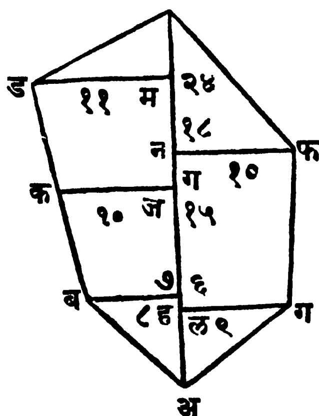
પરિશિષ્ટ अ (પહેલા ખંડનું).

ગમે તેવી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કાઢવું.

પહેલી રીત—આપેલી આકૃતિના એક શિરોબિંદુને બીજાં શિરોબિંદુઓ સાથે સાંધો, એટલે તે આકૃતિના ભાગ પડી ત્રિકોણો બનશે. પછી તે ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ કાઢો.

બીજી રીત—૧૫મા કૃત્ય પ્રમાણે આપેલી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિ બરાબરનો એક ત્રિકોણ દોરો, અને પછી એ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કાઢો.

ત્રીજી રીત—આ રીતને મોજણી કરનારની રીત કહે છે. તે નીચે પ્રમાણે છે:—



ધારો કે આપણે **अबकडईफग** આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા માગીએ છીએ. આ આકૃતિનો સૌથી મોટો કર્ણ **अई** દોરો. અને **ब, क, ड, फ, ग** એ બિંદુઓમાંથી **अई** પર લંબો દોરો. એ લંબોને **ह, ज, म, न, ल** એ બિંદુઓમાં **अई**ને મળવા દો. લંબોથી આપેલી આકૃતિના જે વિભાગો પડે છે તે ક્યાં તો કાટખુણ ત્રિકોણો છે કે સમલંબ ચતુષ્કોણો એટલે ટ્રાપીઝિઅમ (કારણ કે **बह॥कज॥डम** અને **फन॥गल**) છે. ટ્રાપીઝિઅમોનું ક્ષેત્રફળ **अह, अज, अम, अल,**

अन અને बह, कज, डम, फन, गल એ અંતરોનાં માપ ઉપરથી નીકળી શકશે.

આ લંબાઈઓનાં માપ કાઢ્યા પછી તે નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવે છે:—

	ई સુધી	
	૨૯	
ड ૧૧	૨૪	
	૧૮	૧૦ फ
क ૧૦	૧૫	
ब ૮	૭	
	૬	૮ ग
	अथी ઉત્તરે	

નીચે આપેલી નોંધો પરથી આકૃતિઓ કાઢો અને તેનાં ક્ષેત્રફળ શોધી કાઢો.

(૧)

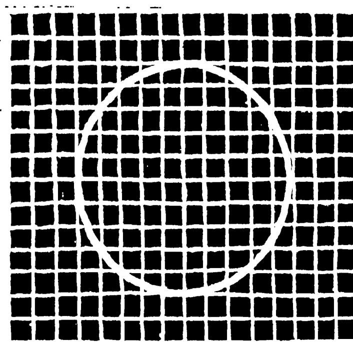
	ड	
	૧૨૦	
क ૫૦	૭૦	
	૫૦	૩૦ ई
ब ૪૦	૩૦	
	अ	

(૨)

	ई	
	૭૦	
ड ૨૦	૬૦	
	૪૦	૧૫ फ
क ૩૦	૩૫	
ब ૨૦	૧૦	
	अ.	

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ.

ચોરસ દોરેલા કાગળ પરનાં પાંચ ઘર અથવા ખાનાં જેટલી લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુળ દોરો. તેમાં કેટલાં ચોરસ ખાનાં છે તે ગણી કાઢો. તે આસરે ૭૮ છે એમ માલમ પડશે. એજ પ્રમાણે ૧૦ અને ૧૫ ખાનાની લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાઓ લઈ વર્તુળો કાઢી પ્રયોગો કરી જુઓ.



ત્રિજ્યા	૫	હોય	છે,	ત્યારે	ક્ષેત્રફળ	૭૮	હોય	છે.
,,	૧૦	,,	,,	,,	,,	૩૧૪	,,	,,
,,	...	,,	,,	,,	,,	...	,,	,, ૬૦

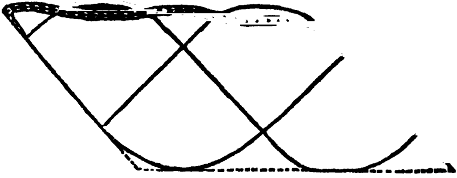
આ ઉપરથી વર્તુળના ક્ષેત્રફળ સંબંધી નીચેનો નિયમ નીકળશે.

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ=ત્રિજ્યા^{૨}×$\frac{૨૨}{૭}$.

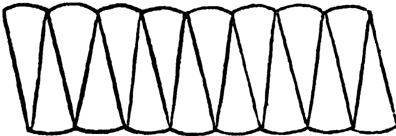
વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ કાઢવાની **બીજી રીત**—

વર્તુળમાં એક બીજી સાથે કાટખુણો કરે એવી એક પછી એક ત્રિજ્યા દોરો. આ ત્રિજ્યાઓથી વર્તુળના જે ભાગો પડે તે કાપી કાઢો, અને તેમને નીચેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો. આ વર્તુળવિભાગોથી લગભગ કેવી આકૃતિ બને છે? "..........." આ આકૃતિની ઉપલી અને

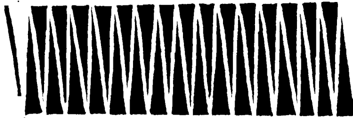
નીચલી બાજુઓ સીધી લીટીઓ નથી, કેમકે તે વર્તુળના કાંસોની બનેલી છે.



હવે જો આપણે વર્તુળના વધારે ભાગો પાડીને એથી નાના વર્તુળવિભાગો બનાવીએ, તો તે વર્તુળવિભાગોને નીચે બતાવ્યા પ્રમાણે સાથે સાથે ગોઠવવાથી થતી આકૃતિની ઉપલી તથા નીચલી બાજુઓ લગભગ સીધી લીટી જેવીજ થાય છે કે નહિ? "હા". ત્યારે ધારી લો કે વર્તુળના ઘણા નાના ભાગો પાડી તેથી થએલા વર્તુળવિભાગોને નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ગોઠવ્યા છે.



अ



ब

આ પ્રમાણે થએલી આકૃતિ ભૂમિતિની કઈ આકૃતિને મળતી આવે છે? "લંબચોરસને." આ લંબચોરસની લંબાઈ કેટલી છે? આપેલા વર્તુળના પરિઘના અર્ધ બરોબર." તેની ઉંચાઈ કેટલી છે? "વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલી." લંબ-

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ લંબાઈ ને ઉંચાઈના ગુણાકાર બરોબર હોય છે. આપણી આકૃતિમાં લંબાઈ $= \frac{1}{2}$ પરિધ $= \frac{1}{2}$(ત્રિજ્યા $\times$ ૨ $\times \frac{22}{7}$) = ત્રિજ્યા $\times \frac{22}{7}$; અને ઉંચાઈ = ત્રિજ્યા.

માટે એ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ (લંબાઈ $\times$ ઉંચાઈ) $= \frac{22}{7}$ $\times$ ત્રિજ્યા $\times$ ત્રિજ્યા = ત્રિજ્યા$^2 \times \frac{22}{7}$. આ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા$^2 \times \frac{22}{7}$.

(ભાસ્કરાચાર્યે કરેલા '**લીલાવતી**' નામના સંસ્કૃત ગ્રંથમાં આ રીત આપેલી છે.)

ત્રીજી રીત—ધારો કે થોડામાં થોડે અંતરે ત્રિજ્યાઓ કાઢીને વર્તુળના ભાગો પાડયા છે. જો આવા ભાગોની સંખ્યા ઘણીજ મોટી હોય, તો દરેક ભાગ લગભગ ત્રિકોણને મળતો આવશે. ધારો કે એવા **ક્ષ** ત્રિકોણો છે. અલબત આ **ક્ષ** ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ તેજ વર્તુળનું પણ ક્ષેત્રફળ થશે.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = પાયો $\times$ ઉંચાઈ $\times \frac{1}{2}$. ઉપર જણાવેલા ત્રિકોણોમાંના દરેકની ઉંચાઈ = ત્રિજ્યા છે, અને પાયો $= \frac{\text{પરિધ}}{\text{ક્ષ}}$ છે. પરંતુ પરિધ = ત્રિજ્યા $\times$ ૨ $\times \frac{22}{7}$; માટે $\frac{\text{પરિધ}}{\text{ક્ષ}}$ = (ત્રિજ્યા $\times$ ૨ $\times \frac{22}{7} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}}$).

અર્થાત્, દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા $\times$ (ત્રિજ્યા $\times$ ૨ $\times \frac{22}{7} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}}$) $\times \frac{1}{2}$ = ત્રિજ્યા$^2 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}}$.

માટે **ક્ષ** ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા$^2 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}} \times$ **ક્ષ**. = ત્રિજ્યા$^2 \times \frac{22}{7}$.

∴ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા$^2 \times \frac{22}{7}$.



પરિશિષ્ટ ब.

પરચુરણ પ્રશ્નો.

(૧) જો **अबकडई** એ વર્તુળમાં દોરેલો નિયમિત પંચકોણ હોય, તો

(૧) **अक**,**अड** એ **अ** ખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરે છે,

(૨) **अब** ॥ **ईक**,

(૩) **अकड** ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે, અને તેના પાયા પરનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણાથી બમણો છે.

(૪) જો **बड**, **कई** એ **क्ष** બિંદુમાં મળતાં હોય, તો **कडक्ष** ને **कडई** ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

(૫) **अ** આગળની સ્પર્શલીટી **बई**ને સમાંતર છે.

(૨) ઉપલા પ્રશ્નમાં **बड** અને **कई** વચ્ચેનો ખુણો કેવડો છે ?

(૩) એક વર્તુળમાં **अक** કૌંસ = **बड** કૌંસ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अड** એ **कब**ને સમાંતર છે અથવા **कब**ની બરોબર છે.

(૪) **अईब** અને **कईड** જ્યાએા એક બીજીને કાટખુણે છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે કૌંસ **अक** + કૌંસ **बड** = કૌંસ **कब** + કૌંસ **डअ** = $\frac{1}{2}$ પરિધ.

(૫) **अब** કૌંસ પર **प** એ એક ચળ બિંદુ હોય, તો સાબીત કરો કે ∠**अपब**ને દુભાગનારી લીટી એક સ્થાયી બિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

(૬) **अ**,**ब**,**क** એ વર્તુળના પરિધ પરનાં ત્રણ બિંદુઓ છે. ∠**अबक**ને દુભાગનારી લીટી પરિધને **ड**માં મળે છે. **डई** લીટી **अब**ને સમાંતર દોરી છે અને પરિધને **ई**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **डई** = **बक**.

(૭) જો એક બીજીને છેદતી બે જ્યાઓ, છેદનબિંદુને વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી સાથે સરખા ખુણાઓ કરતી હોય, તો તે બંને બરોબર હોવી જોઈએ.

૮. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુની અંદર તથા આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ અને ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ એક સીધી લીટીમાં હોય છે.

૯. બે વર્તુળો એક બીજાને **अ** તથા **ब** બિંદુમાં છેદે છે; અને **अ** તથા **ब**માં થઈને બંને વર્તુળોને છેદનારી **कअड** અને **ईबफ** એ સમાંતર લીટીઓ દોરવામાં આવી છે, તો બતાવી આપો કે **कई=डफ**.

૧૦. **अबक** એ વર્તુળની અંદર દોરેલો ત્રિકોણુ છે. **अ**, **ब**,**क** બિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર લંબો દોર્યા છે અને જરૂર પડે લંબાવવામાં આવ્યા છે. તેઓ પરિધિને **ड**,**ई**,**फ**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **ईफ**, **फड**, **डई** કાંસો **अ**, **ब**,**क** બિંદુઓમાં અનુક્રમે દુભાગાય છે.

૧૧. જો એક વર્તુળની **अईब** અને **कईड** જ્યાઓ એક બીજીને **ई**માં છેદતી હોય, તો બતાવી આપો કે **अक**,**बड** કાંસો સામેના મધ્યકોણોનો સરવાળો= ૨ $\angle$**अईक**.

૧૨. **पद** લીટી **अ**,**ब**,**क** બિંદુઓ સાથે સરખા ખુણા કરે છે. **पअद**, **पबद** ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ **र** બિંદુમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **कर** લીટી **पकद** ખુણાને દુભાગે છે.

૧૩. **अबकडईफग** એ નિયમિત સપ્તકોણની **डई** બાજુ-ના છેડાનાં બિંદુઓ **अ** શિરોબિંદુ સાથે સાંધ્યાં છે; તો સાબીત કરો કે **अडई** ત્રિકોણના પાયા આગળનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણાથી ત્રણગણો છે.

૧૪. એક ત્રિકોણ આપ્યો છે, તેના પાયા પરનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો નિયમિત

સમકોણ કેવી રીતે દોરશો તે બતાવો.

૧૫. એકી સંખ્યા **स** જેટલી બાજુઓવાળી એક નિયમિત બહુકોણ આકૃતિની એક બાજુના છેડાનાં બિંદુઓ, સામેના ખુણાના શિરોબિંદુ સાથે સાંધવામાં આવ્યાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે એ પ્રમાણે થએલા ત્રિકોણના પાયા પરનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણા કરતાં ($\frac{स-૧}{૨}$)ગણો છે.

૧૬. **अ** શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, પાયો **बक**, અને **अ** શિરોબિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગનારી લીટી **अबक** ત્રિકોણના પાયાને જે બિંદુમાં મળે છે તે **ड** બિંદુ (ની સ્થિતિ), એ આપેલાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૧૭. એકજ વર્તુળમાં શિરોબિંદુ આગળના ખુણાઓ સરખા હોય એવા પુષ્કળ ત્રિકોણો કાઢવામાં આવે, તો સાબીત કરો કે તેના પાયાઓ અમુક એક વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૧૮. વર્તુળના **बक** વ્યાસના છેડાનાં બિંદુઓમાંથી **बई**, **कफ** એ સમાંતર જ્યાઓ દોરી છે, અને તે પરિધને **ई** તથા **फ**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ईफ** વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૧૯. **म** એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **अमब** એક વ્યાસ છે, અને **अक** એક જ્યા છે. **अब** પર **मड** લંબ દોરો, ને તેને **अक**ને અથવા લંબાવેલી **अक**ને **ड**માં મળવા દો. હવે સાબીત કરો કે **अमड** ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલું વર્તુળ **म**,**ब**,**क**,**ड**માં થઈને પસાર થતા વર્તુળની બરોબર છે.

૨૦. **अ**,**ब** એક વર્તુળના કૌંસના છેડાનાં બિંદુઓ છે, અને **द** કૌંસ પરનું એક બિંદુ છે. **अद** અથવા લંબાવેલી **अद**માં **प** એક એવું બિંદુ લીધું છે કે **दप**=**दब** છે; તો સિદ્ધ કરો કે **द**ની સ્થિતિ ગમે ત્યાં હોય તોપણ **प** બિંદુ **अ**,**ब**માં થઈને પસાર થતા એક નિશ્ચિત વર્તુળ પરજ હોય છે.

૨૧. એક વર્તુળની **मअ** ને **मब** ત્રિજ્યાઓ એક બીજીને કાટખુણે છે, અને **अक्ष,बय** બે સમાંતર જ્યાઓ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बक्ष** તથા **अय** એક બીજીને કાટખુણે છેદે છે.

૨૨. બે વર્તુળો એક બીજાને **अ,ब**માં છેદે છે, અને **अ**-માંથી દોરેલી એક લીટી વર્તુળોને **प** તથા **द**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **पबद** ત્રિકોણના ખુણાઓ નિત્ય છે.

૨૩. **अबक** એક ત્રિકોણ છે, અને **ड** એ **अक**માં એક બિંદુ છે. જો **बअड** ને **बकड**ની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો સરખાં હોય, તો સિદ્ધ કરો કે **अबक** ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે.

૨૪. **अबकड** એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. **बई** લીટી **अब** સાથે **बअड** ખુણા બરાબરનો **अबई** ખુણો કરે છે, અને લંબાવેલી **डक**ને **ई** બિંદુમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बकड** ને **बईड** ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો સરખાં છે.

૨૫. જેની ત્રિજ્યાઓ આપેલી બે લીટી જેવડી અનુક્રમે હોય, અને જેની સામાન્ય જ્યા આપેલી લંબાઈની હોય, એવાં બે વર્તુળો દોરો.

૨૬. સાબીત કરો કે એક બીજાને છેદનારાં બે વર્તુળોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી એક બીજીને સમાંતર દોરેલી લીટીઓ, અથવા સામાન્ય જ્યા સાથે સરખા ખુણાઓ કરે એમ દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૨૭. એક બીજાને છેદનારાં બે વર્તુળોના ગમે તે એક છેદનબિંદુમાંથી તે વર્તુળનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીને સમાંતર દોરેલી લીટી સર્વથી મોટી છે.

૨૮. વર્તુળ બહારના એક **अ** બિંદુમાંથી **अबक** ને **अडई** સીધી લીટીઓ વર્તુળને છેદે એમ દોરેલી છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बई** અને **डक**નું છેદનબિંદુ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ નથી.

૨૯. વર્તુળના મધ્યબિંદુથી જેનું અંતર પોતાની લંબાઈનું અર્ધ હોય, એવી આપેલા વર્તુળમાં એક જ્યા દોરો.

૩૦. વર્તુળની અંદર આપેલા એક બિંદુમાં થઈને જનારી સૌથી નાની જ્યા દોરો.

૩૧. આપેલા બિંદુમાં થઈને પસાર થાય, અને આપેલા બિંદુ આગળ જેના બે સરખા ભાગ પડે, એવી એક જ્યા આપેલા વર્તુળમાં દોરો.

૩૨. એક અર્ધવર્તુળના કાંસના ત્રણ સરખા ભાગ કરો. તેમજ ૯૦°ના કાંસના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩૩. બે સમકેંદ્ર વર્તુળો આપ્યાં છે. **अब** એ એક વર્તુળનો ચળ વ્યાસ છે, અને **प** એ બીજા વર્તુળના પરિઘ પરનું ચળ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अप**² તથા **बप**²નો સરવાળો નિત્ય છે.

૩૪. **अबक** ને **पदर** એ એક વર્તુળમાં કાઢેલા બે ત્રિકોણો છે, અને તેમાં **अ,प,ब,द,क,र** બિંદુઓ અનુક્રમે એક પછી એક આવે છે; વળી **अप** કાંસ=**बद** કાંસ=**कर** કાંસ છે; તો સિદ્ધ કરો કે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

૩૫. વર્તુળના પરિઘ ઉપર આપેલાં બે બિંદુઓ **प** ને **द** માંથી બે સરખી અને સમાંતર જ્યાઓ દોરો.

૩૬. **म** એ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને **अ** તે વર્તુળમાં એક ગમે તે બિંદુ છે; **अमक** એ વ્યાસ છે અને **प** એ પરિઘ પરનું ગમે તે એક બિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે **अक** એ **अप**ના કરતાં નાની છે, અને **अप** એ **अब**ના કરતાં નાની છે.

૩૭. **ब** એક વર્તુળની ત્રિજ્યા છે; તો વર્તુળના મધ્યબિંદુથી **ड** અંતરે આવેલા એક બિંદુમાંથી દોરેલી મોટામાં મોટી અને નાનામાં નાની જ્યાની લંબાઈ કેટલી ?

૩૮. એક નિયમિત ષટ્કોણની બાજુઓને બંને તરફ લંબાવવાથી થતી આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ ષટ્કોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું છે એ સિદ્ધ કરી બતાવો.

૩૯. **अब** જ્યાના છેડાનાં બિંદુઓ આગળ દોરેલી લંબ-૩૫ જ્યાઓ **अप** ને **बद** બરાબર છે એ સાબીત કરો.

૪૦. વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બે લીટીઓના છેદનબિંદુને વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી સ્પર્શલીટીઓના સ્પર્શબિંદુઓને જોડનારી લીટીને કાટખુણે દુભાગે છે.

૪૧. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા તથા તે ત્રિકોણનો પાયો એ બે આપેલાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૪૨. એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **म** છે અને ત્રિજ્યાની લંબાઈ **ब** છે. **अ** તે વર્તુળ બહાર આવેલું એક બિંદુ છે. **म**ને મધ્યબિંદુ લઈને ૨ **ब** જેટલી ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. **अ**ને મધ્યબિંદુ લઈને **अम** ત્રિજ્યાએ એક એવું બીજું વર્તુળ દોરો કે તે પહેલા વર્તુળને **ब** અને **क**માં છેદે. **मब, मक** આપેલા વર્તુળને **ड** અને **ई**માં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે **अड, अई** આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૪૩. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब = अक**. એક વર્તુળ એવું કાઢ્યું છે કે તે **अब**ને **ब**માં સ્પર્શ કરે છે, અને તેનું મધ્ય-બિંદુ **अक**ના લંબાવેલા ભાગમાં છે. **बक**ને લંબાવી છે, ને તે વર્તુળને **ड**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ड**માં થઈને પસાર થતી વર્તુળની ત્રિજ્યા **अक** સાથે કાટખુણો કરે છે.

૪૪. એક સમબાજુ ત્રિકોણમાં એક બીજાને સ્પર્શ કરે એવાં ત્રણ વર્તુળો દોરો.

૪૫. એક ચોરસમાં ચાર સરખાં વર્તુળો એવાં કાઢો, કે તેમાંનું દરેક બીજાં બેને સ્પર્શ કરે.

૪૬. બે વર્તુળો એક બીજાને **अ** બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે. **अ** બિંદુમાંથી બંને વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એવી એક લીટી દોરી છે, અને તેમાં એક **ट** બિંદુ લીધું છે. **ट**માંથી તે વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એવી **टप, टद** લીટીઓ દોરી છે; તો સાબીત કરો કે **टप = टद**.

૪૭. **अबक** ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળનું મધ્ય-બિંદુ **म** છે, અને **अड** તે ત્રિકોણની ઉંચાઈ છે; તો સિદ્ધ કરો કે ∠**बअड** = ∠**कअम**.

૪૮. બે વર્તુળો એક બીજાને **ब** તથા **क**માં છેદે છે. **प** એક વર્તુળ પરનું ચળ બિંદુ છે. **पब**, **पक** (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) બીજા વર્તુળને **द** અને **र**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **दर**ની લંબાઈ નિત્ય છે.

૪૯. **अबक** ત્રિકોણની **बक**,**कअ**,**अब** બાજુઓનાં **ड**, **ई**,**फ** એ અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે. જો **अल** એ **बक** પર-નો લંબ હોય, તો સાબીત કરો કે **ड**,**ई**,**फ**, **ल** બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૫૦. **अबक** ત્રિકોણનાં **ब** અને **क** શિરોબિંદુઓમાંથી દોરેલા **बई**,**कफ** લંબો એક બીજાને **ह**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે,

(૧) ∠**फअह** = ∠**फईह**,

(૨) ∠**फईह** = ∠**फकब**,

(૩) જો **अह** લંબાવવાથી **बक**ને **ड**માં મળતી હોય, તો **अफडक** ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

(૪) **अड** એ **कब** પર લંબ છે.

૫૧. **अबक** ત્રિકોણમાં **बई**,**कफ** લંબો એક બીજાને **ह**માં છેદે છે. તે ત્રિકોણની આસપાસ એક વર્તુળ દોર્યું છે. **बई**ને લંબાવવાથી તે આ વર્તુળને **च**માં મળે છે; તો સાબીત કરો કે **ई** એ **हच**નું મધ્યબિંદુ છે.

૫૨. **अबक** ત્રિકોણમાં કાઢેલા વર્તુળનું **म** એ મધ્યબિંદુ છે, અને ત્રિકોણની એક બાજુને તથા બીજી બે બાજુઓના લંબાવેલા ભાગોને સ્પર્શ કરનારા વર્તુળનું **न** એ મધ્યબિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ब**,**म**,**क**,**न** ચક્રીય બિંદુઓ છે.

૫૩. જેનું મધ્યબિંદુ **म** છે એવું એક વર્તુળ **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુને બહારથી **ड** બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે, અને **अब**,**अक**ના લંબાવેલા ભાગોને **फ** તથા **ई**માં અનુક્રમે સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે,

(૧) $\angle$**बमक**$=\frac{1}{2}\angle$**फमई**$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle$**अ**, અને

(૨) ૨ **अई**=૨**अफ**=**बक**+**कअ**+**अब**, તેમજ

(૩) જો **अबक** ત્રિકોણની અંદર કાઢેલા વર્તુળનું **न** મધ્યબિંદુ હોય, તો $\angle$**बनक**$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle$**अ**.

૫૪. **अबक** ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળનું **म** મધ્યબિંદુ છે, ને **अम**ને લંબાવવાથી તે ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને તે **प** બિંદુમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **पब** = **पक** = **पम**.

૫૫. **अ** બિંદુમાંથી એક વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બે લીટીઓ દોરી છે. એક ચળ સ્પર્શલીટી તેમને **ब**,**क**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अबक** ત્રિકોણની પરિમિતિ નિત્ય છે, અને **बक** લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જે ખુણો કરે છે તે પણ નિત્ય છે.

૫૬. **अबक** ત્રિકોણમાં એક વર્તુળ દોરેલું છે, અને **अ** તરફની બાજુએ તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી એક લીટી દોરી છે, તે **अब**,**अक**ને અનુક્રમે **ड** ને **ई**માં મળે છે; તો સાબીત કરો કે **अबक** અને **अडई** ત્રિકોણોની પરિમિતિનો તફાવત **बक**થી બમણો છે.

૫૭. એક વર્તુળ અને એક સીધી લીટી આપેલાં છે; તો આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે તે બિંદુ-માંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એમ દોરેલી લીટીઓનાં સ્પર્શ-બિંદુઓને સાંધનારી લીટી પરિધિ ઉપરના કોઈ પણ બિંદુ સાથે એક આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરે. (આ પ્રશ્નનો ઉત્તર અશક્ય ક્યારે થાય?)

૫૮. આપેલાં **अ,ब** બિંદુઓમાંથી **पद** લીટીને મળે એવી બે સરખી લીટીઓ એ પ્રમાણે દોરો, કે તેમની વચ્ચેનો ખુણો એક આપેલા ખુણાની બરોબર થાય.

૫૯. જો કોઈ કૌંસના અર્ધની જ્યા આખા કૌંસની જ્યા કરતાં મોટી હોય, તો તે કૌંસ આખા પરિઘના $\frac{૨}{૩}$ કરતાં મોટો હોવો જોઈએ.

૬૦. એક વર્તુળની **क्षय** જ્યા **अब** વ્યાસને કાટખુણે છે. બીજી એક **यमज्ञ** જ્યા **अब**ને **म**માં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે **क्षअ** અથવા **क्षब** લીટી **ज्ञक्षम** ખુણાને દુભાગે છે.

૬૧. બે સરખાં વર્તુળોની **अब** એ સામાન્ય જ્યા છે. એક વર્તુળની **अक** જ્યા **अब** બરોબર છે અને પાછલી બાજુએ લંબાવવામાં આવે તો બીજા વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે; તો સાબીત કરો કે **अब** દરેક વર્તુળની ત્રિજ્યા બરાબર છે.

૬૨. એક વર્તુળના પરિઘ ઉપર **अ,ब,क,ड** એ અનુક્રમે ચાર બિંદુઓ આવેલાં છે. **अब** કૌંસ **कड** કૌંસ બરોબર છે. **अक** ને **बड** જ્યાઓ એક બીજીને **ई**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अईब** ને **कईड** ખુણાઓને દુભાગનારી જ્યા **ई** બિંદુમાં દુભાગાય છે.

૬૩. **अबक** એ એક વર્તુળમાં દોરેલો ત્રિકોણ છે. **बअक** ખુણાને દુભાગનારી લીટી પરિઘને પાછી **ड**માં મળે છે. **ड**ને મધ્યબિંદુ લઈને **डक** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોર્યું છે, તે **अड**ને **ई**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बई** લીટી **अबक** ખુણાને દુભાગે છે.

૬૪. **ड**માંથઈને ત્રણ સરખાં વર્તુળો પસાર થાય છે. તેમાંથી બબ્બે એક બીજાને છેદે છે. તેમનાં છેદનબિંદુઓ **अ,ब,क** છે; તો બતાવી આપો કે **ड** એ **अबक** ત્રિકોણનું લંબકેંદ્ર* છે.

---

* ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબો જે બિંદુમાં મળે છે તેને 'લંબકેંદ્ર' કહે છે.

૬૫. વર્તુળમાં દોરેલા ષટ્કોણના સામસામા ખુણાઓની બે જોડોમાંના ખુણાઓ સરખા હોય, તો ત્રીજી જોડમાંના સામસામા ખુણાઓ પણ સરખા હોય અને સામસામી બાજુઓ સમાંતર હોય.

૬૬. બે વર્તુળો એક બીજાને **अ**,**ब**માં છેદે છે. **प** અને **द** બિંદુઓ એક વર્તુળના પરિધ ઉપર છે અને બીજા વર્તુળ-ની બહાર પડે છે. **पअक**, **पबड**, **दअई**, **दबफ** લીટીઓ બીજા વર્તુળના પરિધને **क**,**ड**,**ई**,**फ** એ બિંદુઓમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **ईकफ** કૌંસ **कफड** કૌંસની બરોબર છે.

૬૭. કોઈ ચક્રીય ચતુષ્કોણની બે સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો બીજી બે બાજુઓ સમાંતર હોવી જોઈએ.

૬૮. એક વર્તુળમાં **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, અને **प** એ નાના કૌંસ **बक** પર આવેલું એક બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **पअ=पब+पक**.

૬૯. **अब** એક આપેલા વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને **अक** તેની એક જ્યા છે. **अ** અને **क**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ **ड**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **ड** ખુણો **बअक** ખુણાથી બમણો છે.

૭૦. **क** એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને **अब** તેની જ્યા છે. **अब**થી કાપી કઢાએલા મોટા કૌંસ પર **प** એક બિંદુ છે. **अब**ને કાટખુણે દોરેલા વ્યાસને **पअ**,**पब** એ **ड**,**ई** બિંદુઓમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **डपई** અને **डकअ** ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૭૧. ત્રિકોણમાં કાઢેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ ત્રિકોણની એક એક બાજુને વ્યાસ તરીકે લઈને દોરેલાં વર્તુળોમાંના દરેકની અંદર પડે છે.

૭૨. ચોરસના કર્ણ ઉપરના એક બિંદુમાંથી **पर**,**दस**

લીટીઓ ચોરસની બાજુઓને સમાંતર દોરી છે. **प,द,र,स** બિંદુઓ ચોરસની બાજુઓ પર છે; તો તે બિંદુઓ ચક્રીય છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૩. **म** એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, **कड** વ્યાસ છે, અને **कड** સાથે કાટખુણો કરનારી **अब** જ્યા છે. **कड**માંના કોઈ પણ બિંદુ **ई**ને **ब** સાથે સાંધો અને **बई**ને લંબાવો. જો તે વર્તુળને **फ**માં મળતી હોય, તો સાબીત કરો કે **अ,म,ई,फ** બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૭૪. **अबक** એક ત્રિકોણ છે અને **बड,कई** અનુક્રમે **अक,अब** પર લંબો છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अडई** અને **अबक** ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૭૫. **मन** લીટી અને તે લીટીની એકજ બાજુ પર **अ** ને **ब** બિંદુઓ આપેલાં છે. **मन**માં એક **प** બિંદુ એવું શોધી કાઢો કે **पब** લીટી **मन** સાથે જે ખુણાઓ કરે છે તેમાંનો એક **पअ** વડે દુભાગાય.

૭૬. ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને (એક અંદરથી અને એક બહારથી) સ્પર્શ કરનારાં બે વર્તુળો દોર્યાં છે; તો તેમનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટીને વ્યાસ તરીકે લઈને દોરેલું વર્તુળ ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓમાં થઈને જાય છે.

૭૭. ત્રિકોણની અંદર અને તેની આસપાસ દોરેલાં બે વર્તુળો આપ્યાં છે, તેમજ ત્રિકોણને બહારથી સ્પર્શ કરનારા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ આપેલું છે; તો તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૭૮. **अबकड** એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. **अबक** ખુણાને **बई** દુભાગે છે અને વર્તુળના પરિઘને **ई** બિંદુમાં મળે છે. **अड** ને **फ** સુધી લંબાવી છે; તો સિદ્ધ કરો કે **डई** એ **कडफ** ખુણાને દુભાગે છે.

૭૯. બે વર્તુળો એક બીજાને **अ** અને **ब**માં છેદે છે, અને **पअपं, दबदं** એ સમાંતર લીટીઓ વર્તુળોને **प,पं** અને

द,**द्**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **पद** અને **पद्**
બરોબર છે.

૮૦. બે વર્તુળો એક બીજાને **ब** અને **ड**માં છેદે છે.
अबक લીટી વર્તુળોને **अ**,**ब**,**क**માં છેદે છે. **अड**,**कड**
વર્તુળોને **प** અને **द**માં છેદે છે. **अद** ને **कप** એ **र**માં મળે
છે, તો સિદ્ધ કરો કે **डपदर** ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

૮૧. એક ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓને
લંબાવવાથી તેઓ **प** અને **द**માં મળે છે, અને ચતુષ્કોણની
બહાર એ પ્રમાણે બનેલા ત્રિકોણોની આસપાસ વર્તુળો દોરવા-
માં આવ્યાં છે, જેઓ એક બીજાને **र**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ
કરો કે **प**,**र**, ને **द** બિંદુઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

૮૨. જો કોઈ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણાઓનો સર-
વાળો બે કાટખુણા બરોબર હોય, તો સિદ્ધ કરો કે બાજુઓ-
ને દુભાગનાર લંબો એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૮૩. બે આપેલાં વર્તુળોનાં **अ**,**ब** બે છેદનબિંદુઓ છે.
बમાં થઈ જતી અને બંને વર્તુળોના પરિધને મળનારી **कबड**
લીટી એવી રીતે કાઢો કે **अकड** ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મોટામાં
મોટું થાય.

૮૪. જો કોઈ વર્તુળની બે જ્યાઓ એક બીજીને કાટ-
ખુણે હોય, તો સિદ્ધ કરો કે જ્યાઓના ચારે ભાગો પરના
ચોરસોનો સરવાળો વ્યાસ પરના ચોરસની બરોબર હોય છે.

૮૫. આપેલા વર્તુળના **अ** મધ્યબિંદુમાંથી **अब** અને **अक**
એ બે લીટીઓ દોરી છે; તો જેનો **अब** અને **अक** વચ્ચે
આવેલો ભાગ આપેલી લંબાઈનો થાય એવી એક સ્પર્શલીટી
કેવી રીતે દોરશો તે શોધી કાઢો.

૮૬. **पचर** સમબાજુ ત્રિકોણની **चर** બાજુ **स** સુધી
એવી રીતે લંબાવી છે કે **रस**=**चर** છે; તો સાબીત કરો
કે **पस**^{2}=૩**पर**^{2}.

૮૭. **अ** બિંદુમાંથી એક વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બે અચળ લીટીઓ દોરી છે, અને તેમને મળનારી તેજ વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી એક ત્રીજી ચળ લીટી દોરી છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अबक** ત્રિકોણની પરિમિતિ નિત્ય છે, અને **बक** મધ્ય-બિંદુ સાથે જે ખુણો કરે છે તે પણ નિત્ય છે.

૮૮. **अबकड** વર્તુળનું **द** એ મધ્યબિંદુ છે અને **अब** તથા **कड** જ્યાઓ એક બીજીને **प** બિંદુ આગળ કાટખુણે છેદે છે. **अक** અને **दप** લીટીનાં **म** અને **न** એ મધ્યબિંદુઓ છે; તો સિદ્ધ કરો કે $२(\text{मन}^2+\text{तन}^2)=\text{दअ}^2$.

૮૯. વર્તુળની જે જ્યાઓ એક અચળ બિંદુ સાથે કાટ-ખુણો કરતી હોય તેનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન વર્તુળ હોય છે.

૯૦. **अ,ब,क,ड** એ ચાર બિંદુઓ એક સીધી લીટીમાં નથી; તો બતાવી આપો કે આ બિંદુઓથી જેનો પરિઘ સરખે અંતરે હોય એવું વર્તુળ કાઢી શકાશે.

૯૧. એક વર્તુળ **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુને **ड**માં અને લંબાવેલી **अब,अक**ને **ई** તથા **फ**માં સ્પર્શ કરે છે. ત્રિકોણની અંદર દોરેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **म** છે; તો સાબીત કરો કે **मअई** અને **मअफ** એ બે ત્રિકોણોનો સરવાળો **अबक** ત્રિકોણની બરોબર છે.

૯૨. **अबकड** એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે, અને **कक्षब** તથા **कक्षड** વર્તુળો એક બીજાને **क्ष** બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે **क्ष** બિંદુ એક અચળ વર્તુળ ઉપર છે.

૯૩. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને **अ**માં સ્પર્શ કરે છે. તેમની ત્રિજ્યાઓથી બમણી ત્રિજ્યાવાળું એક ત્રીજું વર્તુળ સરખાં વર્તુળોમાંના એકને અંદરથી **ब**માં સ્પર્શ કરે છે અને બીજાને **प** અને **द**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अब** લીટી **प** કિંવા **द**માં થઈને જાય છે.

૯૪. **अबक** ત્રિકોણનો **क** ખુણો સાંકડો છે. **बड** એ **अक** ઉપર લંબ છે. **डअ**નો અથવા **डअ**ને લંબાવી તેનો **डप** ભાગ **डक** બરોબર કાપી કાઢો. તેમજ **बअ**નો અથવા **बअ**ને લંબાવી તેનો **बद** ભાગ **बक** બરોબર કાપી કાઢો. **पद** સાંધો, અને સિદ્ધ કરો કે ∠**पदअ**=∠**क**+½∠**ब**.

૯૫. **बड** લીટીનું **क** એ મધ્યબિંદુ છે અને **बड** પર **कम** લંબ દોરેલો છે. **कम**માં એક **ई** બિંદુ લો. **डई** સાંધો અને **डई**ને **अ** સુધી લંબાવો. **ब,ई,अ**માં થઈને જાય એવું વર્તુળ દોરો, અને તેને **कम** ને બીજા એક **फ** બિંદુમાં છેદવા દો. સાબીત કરો કે **फ** એ **अईब** કૌંસનું મધ્યબિંદુ છે.

૯૬. ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓને મળતાં સુધી લંબાવવાથી થતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજી પર લંબ હોય છે.

૯૭. વર્તુળની બહાર એક **क** બિંદુ આપેલું છે. વર્તુળને **प,य**માં છેદનારી **कपय** લીટી એવી કાઢો કે **कय** લીટી **प** આગળ દુભાગાય. (આમ ક્યારે ન બની શકે ?)

૯૮. આપેલાં બે બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું એક એવું વર્તુળ દોરો કે એક આપેલી લીટીનો જે ભાગ એ વર્તુળમાં પડે તે આપેલી લંબાઈનો હોય.

૯૯. વર્તુળના પરિઘ ઉપરના એક આપેલા બિંદુમાંથી એક બીજીને કાટખુણે બે એવી જ્યાઓ દોરો કે વર્તુળના મધ્યબિંદુથી એકનું અંતર તેજ મધ્યબિંદુથી બીજાના અંતર કરતાં બમણું થાય.

૧૦૦. એક એવું વર્તુળ કાઢો કે જેનું મધ્યબિંદુ એક આપેલું બિંદુ થાય, અને જેનો વ્યાસ આપેલા એક બીજા બિંદુમાંથી દોરેલી તે વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીની બરો-બર થાય.

૧૦૧. એક વર્તુળમાં દોરેલા **अबकड** ચતુષ્કોણના **अ** અને **ड** ખુણાઓમાંનો દરેક અર્ધા કાટખુણા બરોબર છે. **ब**માંથી **अड** પર દોરેલા લંબને લંબાવતાં તે વર્તુળને **ई**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **कई** એ વર્તુળનો વ્યાસ છે અને **अ**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીને સમાંતર છે.

૧૦૨. **अब** પર અને તેની એકજ બાજુએ બે વર્તુળખંડો એવા દોરેલા છે કે બહારના કૌંસ પરના **क** બિંદુમાંથી દોરેલી **कअ,कब** જ્યાઓ અંદરના કૌંસને **ड** અને **ई**માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **क**ની સ્થિતિ ગમે ત્યાં હોય, તો પણ **डई** જ્યાની લંબાઈ નિત્ય છે.

૧૦૩. **अबक** ત્રિકોણનો **अब** પાયો અને શિરોબિંદુ આગળનો **क** ખુણો આપેલાં છે. **अ** અને **ब**માંથી **बक** અને **कअ** પર દોરેલા લંબો એ બાજુઓને અનુક્રમે **ड** અને **ई**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **कईड** વર્તુળના મધ્યબિંદુનું **डई**થી અંતર નિત્ય છે.

૧૦૪. **अबप** અને **अबकड** બે વર્તુળો છે. **म** એ પહેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે અને **प** તેના પરિઘ પરનું એક બિંદુ છે, **अक,बड**, બીજા વર્તુળની **प**માં થઈને પસાર થતી જ્યાઓ છે; તો બતાવી આપો કે **मप** એ **कड**ને કાટખુણે છે.

૧૦૫. બે વર્તુળોનું **अ** એક છેદનબિંદુ છે. **ब** અને **क** બે વર્તુળો પર અનુક્રમે આવેલાં બે અચળ બિંદુઓ છે. **अ**માં થઈ જાય એવી રીતે દોરેલી **पअद** લીટી વર્તુળોને **प** ને **द**માં મળે છે; તો **पब** ને **दक**ના છેદનબિંદુનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૦૬. **अडब** વર્તુળનું **क** એ મધ્યબિંદુ છે, અને **अ,ब** વર્તુળ ઉપરનાં બે બિંદુઓ છે. **अ,क,ब**માં થઈને પસાર થતો એક કૌંસ દોર્યો છે. **अपद** લીટી આ કૌંસને **प**માં અને **अडब** કૌંસને **द**માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે **पब=पद**.

૧૦૭. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ એવો કાઢો કે તેની બે બાજુએ બે સમાંતર લીટીએ પર પડે અને બે બીજી બાજુએ બે સ્થિર બિંદુએમાં થઈને જાય. (આ પ્રશ્નના કેટલા ઉત્તર સંભવે ?)

૧૦૮. **म** એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને તેમાં **अब** એક આપેલી જ્યા છે. **प** આપેલા વર્તુળમાં એક બિંદુ છે. **प**માંથી વર્તુળને **क,ड**માં છેદનારી એક એવી લીટી દોરો કે **कड** લીટી **अब** વડે દુભાગાય. (**अब**થી **प** અને **म**નાં અંતરોનો સરવાળો **मप** કરતાં ઓછો હોય તો બે ઉત્તર સંભવે છે, અને જો એ સરવાળો **मप** કરતાં વધારે હોય તો એક પણ ઉત્તર સંભવતો નથી એમ સાબીત કરો.)

૧૦૯. એક બીજાને છેદનારાં બે વર્તુળો આપ્યાં છે. ગમે તે એક છેદનબિંદુમાંથી બે વર્તુળોના પરિઘોને મળે એવી આપેલી લંબાઈની એક લીટી દોરો.

૧૧૦. **अबक** ત્રિકોણમાં દોરેલું વર્તુળ **बक** ને **ड** બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે **बअड** ને **कअड** ત્રિકોણોમાં દોરેલાં વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરે છે.

૧૧૧. **अबकड** ચતુષ્કોણના **ब** ને **ड** ખુણાએ કાટખુણા છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बअक** ને **डअक** ખુણાઓનો તફાવત **बकअ** ને **डकअ** ખુણાઓના તફાવત બરોબર છે. જો કર્ણો વચ્ચેનો ખુણો ૬૦°નો હોય, તો આ તફાવત કેટલો હોય ?

૧૧૨. ત્રિકોણની બે બાજુએ આપેલી છે, ને તેમના પરના ચોરસોનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ પરના ચોરસથી ત્રણગણો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૧૧૩. **अबक** ત્રિકોણની **अब** બાજુ પર દોરેલો વર્તુળખંડ **बक** તથા **कअ**ને (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) **प** તથા **द**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **पद** એક સ્થિર સીધી લીટીને સમાંતર છે.

૧૧૪. **અબકડ** ચોરસ દોરો. **અઙ**માં એક **ઈ** બિંદુ લો. **ઈક**.**ઈડ** સાંધો. **અબ**માં એક **ફ** બિંદુ એવું લીધું છે કે **અફ**=**બઈ** છે; તો સિદ્ધ કરો કે **અબ**.**ઈફ** કાટખુણ ચોખુણ **ઈક** ને **ઈડ** ઉપરના ચોરસોના તફાવત બરોબર છે.

૧૧૫. જો કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતો કાટખુણ ચોખુણ ત્રીજી બાજુ પરના ચોરસની બરોબર હોય, તો સાબીત કરો કે પહેલી બે બાજુઓમાંની નાની બાજુ ત્રીજી બાજુ પર લંબ છે.

૧૧૬. **અબક** ત્રિકોણનો **ક** ખુણો કાટખુણો છે. **અબ** પર **કડ** લંબ દોરો. **કબ**માંથી **બડ** બરોબર **કઈ** ભાગ કાપી કાઢો. **કઅ**માંથી **અડ** બરોબર **કફ** ભાગ કાપી કાઢો. હવે સિદ્ધ કરો કે **અઈ**=**બફ**.

૧૧૭. **અબક**ના શિરોબિંદુ **અ**માંથી **બક**ને લંબાવીને તેના પર એક લંબ દોર્યો છે. તે લંબ **બક**ને **ડ**માં મળે છે. **કડ**=**બક** છે; તો બતાવી આપો કે **અબ** અને **અક**ના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતો કાટખુણ ચોખુણ ૩ **બક**^{૨} બરોબર છે.

૧૧૮. એક લીટીના એવા બે ભાગ કરો કે એક ભાગ પરનો ચોરસ બીજા ભાગ પરના ચોરસથી ત્રણગણો થાય.

૧૧૯. **અબક** ત્રિકોણમાંના **ઓ** બિંદુમાંથી **બક**,**કઅ**, ને **અબ** પર અનુક્રમે **ઓડ**, **ઓઈ**, ને **ઓફ** લંબો દોર્યા છે; તો સિદ્ધ કરો કે **બડ**, **કઈ**, ને **અફ** પરના ચોરસોનો સરવાળો **કડ**, **અઈ**, ને **બફ** પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર છે.

૧૨૦. **અબક** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના **અક** પાયામાં એક **મ** બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **અમ**.**મક**=**અબ**^{૨}−**મબ**^{૨}.

૧૨૧. **અબ**ના **હ** બિંદુમાં એવા બે ભાગ પડે છે કે **અહ** પરનો **અફગહ** ચોરસ **અબ**.**હબ**ની બરોબર છે; તો

બતાવી આપો કે **अह**નું મધ્યબિંદુ **फ,ग,ब** એ બિંદુઓથી સરખે અંતરે છે.

૧૨૨. ત્રિકોણની જે બે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો ૧/૨ કાટખુણા બરાબર હોય, તે બાજુઓ પરના ચોરસોનો સર-વાળો ત્રીજી બાજુ પરના ચોરસ કરતાં તે ત્રિકોણના ક્ષેત્ર-ફળના ચારગણા જેટલો વધારે હોય છે.

૧૨૩. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक** છે. **बक** ને **ड** સુધી લંબાવીને **अ,ड** સાંધ્યાં છે; તો સાબીત કરો કે **अड**^{2}= **अब**^{2}+**बड·डक**.

૧૨૪. **अबकड** ચોરસના **अक** કર્ણને **ई** સુધી લંબાવીને **कई=बक** કરી છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बई**^{2}=**अक·अई**.

૧૨૫. **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**अ**=૧૨૦° છે; તો સિદ્ધ કરો કે **बक**^{2}=**अब**^{2}+**अक**^{2}+**अब अक**.

૧૨૬. **अकब** સીધી લીટીના **अक** ભાગ પર **अकड** એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **डब**^{2}=**अक**^{2}+ **कब**^{2}+**अक·कब**.

૧૨૭. **अबक** ત્રિકોણનો ∠**क** પહોળો ખુણો છે. **अ** અને **ब**માંથી સામેની બાજુઓ પર દોરેલા લંબો તેમને **ड** તથા **ई** બિંદુઓમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अब**^{2}= **बक·बड+अक·अई**.

૧૨૮. **अडईब** વર્તુળનું **क** મધ્યબિંદુ છે અને **अब** વ્યાસ છે. **डई** જ્યા **अब**ને સમાંતર છે. **अड** સાંધો અને **अड** પર **ईड**ના લંબાવેલા ભાગને **प**માં મળે એવો **अप** લંબ દોરો. **पक,अई** સાંધો. હવે સિદ્ધ કરો કે **पक**^{2} = **अप**^{2} + **अक**^{2}+ **अई**^{2}.

૧૨૯. ત્રિકોણની બે બાજુના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતો કાટખુણ ચોખુણ, શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબનું પાયાના મધ્યબિંદુથી અંતર અને પાયો એ બેથી થતા

કાટખુણ ચોખુણથી બમણો હોય છે.

૧૩૦. **અબક** ત્રિકોણનો ∠**क** કાટખુણો છે. **અક**માંના એક **ड** બિંદુમાંથી **अब** પર **डई** લંબ દોર્યો છે; તો બતાવી આપો કે **कअ·अड=बअ·अई.**

૧૩૧. **अबक** ત્રિકોણની **अब** ને **अक** બાજુઓ પર બહારની બાજુએ **अबडई** ને **अकफग** ચોરસો દોર્યા છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ईग**^{2}+ **बक**^{2}= ૨(**अब**^{2}+ **अक**^{2}).

૧૩૨. **अबकड** ચતુષ્કોણનો ∠**ब** કાટખુણો છે, અને **अड**^{2}+ ૨**अब·कड** = **अब**^{2}+ **बक**^{2} + **कड**^{2} છે; તો સિદ્ધ કરો કે ∠**बकड** કાટખુણો છે.

૧૩૩. ત્રિકોણની બાજુઓ પર બહારની બાજુએ ચોરસો દોર્યા છે, અને તે ચોરસોના પાસપાસેના ખુણાઓ સાંધનારી ત્રણ લીટીઓ દોરી છે; તો સિદ્ધ કરો કે આ લીટીઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો તે ત્રિકોણની બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળાથી ત્રણગણો છે.

૧૩૪. **अबक** ત્રિકોણમાં **बक, कअ, अब** પર અનુક્રમે **अड,बई,कफ** લંબો દોરેલા છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अब·अफ** અને **कब·कड** એ બે વચ્ચેનો તફાવત **अक**^{2} બરોબર છે.

૧૩૫. જો કોઈ ચતુષ્કોણની પહેલી અને ત્રીજી બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો બીજી અને ચોથી બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે છેદતા હોવા જોઈએ.

૧૩૬. એક સાંકડખુણ ત્રિકોણની બાજુઓ પર બહારની બાજુએ ચોરસો દોર્યા છે. ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ પર લંબો દોર્યા છે, અને તેમને લંબાવીને દરેક ચોરસના બબ્બે ભાગ પાડ્યા છે. હવે બતાવી આપો કે દરેક ચોરસ બીજા બે ચોરસોમાંના પોતાની પાસેના ભાગોના સરવાળા બરોબર છે.

૧૩૭. **અબકડ** ચતુષ્કોણમાં **અક**=**કડ** અને **અડ**=**બક** છે. ∠**અકબ** ∠**અડક**નો ન્યૂનતાપૂરક છે; તો સિદ્ધ કરો કે **અબ**^{2}= **બક**^{2}+ **કડ**^{2} +**ડઅ**^{2}.

૧૩૮. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો ૪" છે અને સરખી બાજુઓમાંની દરેક ૭" છે; તો પાયાના છેડાથી ગુરુત્વ-કેંદ્ર એટલે મધ્યગાઓનું છેદનબિંદુ કેટલે અંતરે છે તે શોધી કાઢો.

૧૩૯. **અ** ને **બ** બે અચળ બિંદુઓ છે, અને **કડ** એક આપેલી લીટી છે. **કડ**માં એક **પ** બિંદુ એવું શોધી કાઢો કે (**પઅ**^{2}+**પબ**^{2}) એ સરવાળો નાનામાં નાનો થાય.

૧૪૦. એક આપેલા વર્તુળનું **અ** મધ્યબિંદુ છે અને **બક** વ્યાસ છે. **ક** આગળની **કડ** સ્પર્શલીટી **કઅ**ની બરોબર છે. **બ**,**ડ** સાંધો અને **બડ** પર **અઈ** લંબ દોરો. **ક**,**ઈ** સાંધો અને **કઈ**ને લંબાવી તેને પરિઘને **ફ**માં મળવા દો. **બફ** સાંધો. હવે સિદ્ધ કરો કે **બફ**=**ફઈ**.

૧૪૧. **અબકડ** ચોરસના **અ** બિંદુમાંથી દોરેલી એક લીટી લંબાવેલી **કબ**, **કડ**, **ડબ**ને **ઈ**, **ફ**, **દ**માં અનુક્રમે મળે છે; તો બતાવી આપો કે **ક**,**ઈ**,**ફ**માં થઈને પસાર થતા વર્તુળને **કદ** સ્પર્શ કરે છે.

૧૪૨. **અબ**ના **ક** બિંદુમાં બે ભાગ પાડ્યા છે. **અબડઈ** એ **અબ** પરનો ચોરસ છે. **ક**માંથી **બડ**ને સમાંતર દોરેલી લીટી **બઈ**ને **ફ**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ઈબ**.**બફ**= ૨ **અબ**. **બક**.

૧૪૩. સમબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુની લંબાઈ તથા સ્થાન આપ્યાં છે; તો તે સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણોનાં છેદનબિંદુનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૪. આપેલા વર્તુળમાં એક આપેલા બિંદુમાં થઈને પસાર થતી જ્યાઓનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૫. (વર્તુળ બહાર) આપેલા એક બિંદુમાંથી સમકેંદ્ર વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એમ દોરેલી લીટીઓનાં સ્પર્શબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૬. **अब** એક આપેલા વર્તુળની જ્યા છે, અને **प** પરિઘ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. **अक, बड** અનુક્રમે **बप, अप** પરના લંબો છે; તો **कड**નાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૭. કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાઢેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા, અને કર્ણ તથા બીજી બે બાજુઓનાં લંબાવેલા ભાગને સ્પર્શ કરનારા વર્તુળની ત્રિજ્યા, એ બેના તફાવત બરોબર હોય છે.

૧૪૮. ત્રણ વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે બબ્બે વર્તુળોનાં સ્પર્શબિંદુઓમાંથી દોરેલી સામાન્ય સ્પર્શલીટીઓ એક બિંદુમાં મળે છે અને સરખી છે.

૧૪૯. ત્રણ વર્તુળો બહારથી એક બીજાને સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે તે વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી થતા ત્રિકોણમાં દોરેલું વર્તુળ અને વર્તુળોનાં સ્પર્શબિંદુઓને જોડવાથી થતા ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલું વર્તુળ એ બંને એકજ છે.

૧૫૦. એક વર્તુળનું **म** મધ્યબિંદુ છે અને **अब** જ્યા છે. **अब**માંના કોઈ પણ **क** બિંદુમાંથી **अब** પર **कड** લંબ દોર્યો છે, ને તે વર્તુળને **ड**માં મળે છે. તો સિદ્ધ કરો કે ∠**अडक**=∠**मडब**.

૧૫૧. (૧) વર્તુળના વ્યાસના છેડાનાં બિંદુઓમાંથી વ્યાસને ન છેદતી હોય એવી જ્યા પર દોરેલા લંબો જ્યાને વર્તુળની બહારજ મળે છે, અને (૨) તે જ્યાના વર્તુળની બહારના ભાગો સરખા હોય છે.

૧૫૨. વર્તુળમાં નિયમિત ષટ્કોણ કાઢ્યો હોય, તો તે ષટ્કોણની બહારના વર્તુળખંડોમાંનો ખુણો કેવડો હોય?

વર્તુળની અંદર કાઢેલી નિયમિત આકૃતિ ચોરસ, સમબાજુ ત્રિકોણ, અથવા નિયમિત અષ્ટકોણ........હોય, તો આકૃતિની બહારના વર્તુળખંડોમાંનો ખુણો કેવડો હોય ?

૧૫૩. **म** એ **अबक** ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **बक**ને તથા લંબાવેલી **अब, अक**ને સ્પર્શ કરનારા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **न** છે; તો બતાવી આપો કે **क,म,ब,न** એ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૧૫૪. કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણમાંથી બીજી બે બાજુઓ જેવડા ભાગો કાપી કાઢવામાં આવે, તો છેદનબિંદુઓ વચ્ચે આવેલા કર્ણના ભાગ પરનો ચોરસ તે લીટીના બાકીના ભાગોથી થતા કાટખુણાનો બમણો હોય છે.

૧૫૫. ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર જો લંબ દોરવામાં આવે, તો તે પાયાના જે બે ભાગો પડે તેના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતો કાટખુણ ચોખુણ તે ત્રિકોણની બે બાજુઓના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બરોબર હોય છે.

૧૫૬. **अबक** કાટખુણ ત્રિકોણની **अब,बक,कअ** બાજુઓ પર અનુક્રમે **अबडई, बकफम, अकहच** ચોરસો દોરેલા છે; તો **चई**^{2}+**डम**^{2}+**फह**^{2}= ૩(**अब**^{2}+ **बक**^{2}+**कअ**^{2}).

૧૫૭. **अब** જ્યાના છેડાનાં બિંદુઓ આગળ **अक**ને **बई** લીટીઓ વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે. **अक**ના કોઈ પણ **क** બિંદુમાંથી **बई**ને સમાંતર એક લીટી દોરી છે તે **अब**ને અથવા **अब**ના લંબાવેલા ભાગને **ड**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **कअ=कड.**

૧૫૮. એક લીટી એક વર્તુળને **प** અને **द**માં અને બીજા વર્તુળને **र** અને **स**માં છેદે છે. **प** અને **र**માંથી દોરેલી **સ્પર્શલીટીઓ એક બીજીને સમાંતર હોય, તો સિદ્ધ કરો કે**

દ અને **સ**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ પણ એક બીજીને સમાંતર છે.

૧૫૯. બે વર્તુળોનું **અ** એક છેદનબિંદુ છે. **અ**માં થઈને જતી એક **પઅદ** લીટી દોરી છે તે બંને વર્તુળોને **પ** અને **દ**માં છેદે છે. **પ** અને **દ**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ એક બીજીને **ર**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **પરદ** ખુણો **અ**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ વચ્ચેના ખુણાની બરોબર છે.

૧૬૦. આપેલા ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુને શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી, પાયાને સમાંતર દોરેલી લીટીઓનો જે ભાગ તે ત્રિકોણની બીજી બે બાજુઓ વચ્ચે પડતો હોય તેનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૬૧. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણો બનાવો:—

(૧) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને પાયાના ગમે તે છેડાના બિંદુથી દોરેલી સામી બાજુ પરની મધ્યગા.

(૨) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો; અને તે ખુણાને દુભાગનારી લીટી જે બિંદુમાં પાયાને છેદે છે તે બિંદુ.

(૩) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો.

(૪) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને બીજી બે બાજુઓનો તફાવત.

૧૬૨. જેનો પાયો અને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો એ બે આપ્યાં હોય એવા ત્રિકોણોમાં કયા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સૌથી વધારે હોય?

૧૬૩. જે ત્રિકોણનો પાયો અને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો આપ્યાં હોય એવા ત્રિકોણોમાં દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.